Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 5

Fragen oder Fehler, bitte an ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de. Kommentare können auch im Online-Notepad https://zumpad.zum.de/una-MTH-2550-7930-23 hinterlassen werden.
Die mündlichen Aufgaben werden Montag (05/06) um 17:30 Uhr besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist Montag (12/06) um 17:30 Uhr.

1 Mündlich

Aufgabe 1. Sei K algebraisch abgeschlossen und $f \in K[x,y]$ ein nicht-konstantes Polynom mit $f = f_1^{e_1} \dots f_r^{e_r}$, f_i irreduzibel und $e_i \geq 1$. Beweise, dass

$$\mathrm{V}(f) = \mathrm{V}(f_1) \cup \dots \cup \mathrm{V}(f_r),$$

und die $\mathrm{V}(f_i)$ irreduzibel sind, mit $\mathrm{I}(\mathrm{V}(f)) = (f_1 \dots f_r)$.

Lösung. Laut (iii) von Lemma **??** haben wir, dass

$$\mathrm{V}(f) = \mathrm{V}(f_1^{e_1} \dots f_r^{e_r}) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{V}(f_i), \tag{1}$$

da natürlich $\mathrm{V}(f_i) \cup \mathrm{V}(f_i) = \mathrm{V}(f_i)$. Die $\mathrm{V}(f_i)$ sind topologisch irreduzibel laut Satz **??**, da die f_i's bei Definition irreduzibel und daher (f_i)'s prim sind. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\mathrm{I}(\mathrm{V}(f)) = (f_1 \dots f_r)$.

Wir haben

$$\mathrm{I}(\bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{V}(f_i)) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{I}(\mathrm{V}(f_i)) = \bigcap_{i=1}^{r} (f_i) = (f_1 \dots f_r). \tag{2}$$

Die erste Gleichung ist Teil (iv) von Lemma **??**, die zweite Gleichung ist Satz **??**, welches wir anwenden können, da die f_i's irreduzibel, also die (f_i)'s prim sind. Die letzte Gleichung ist Lemma **??**. Gleichungen (1) und (2) zusammengefasst ergibt nun

$$\mathrm{I}(\mathrm{V}(f)) = \mathrm{I}(\bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{V}(f_i)) = (f_1 \dots f_r).$$

□

Aufgabe 2. Bestimme, ob die gegebene Kurve f regulär ist am Punk a und finde alle Tangenten.

i) $f = x(1 + x(1 + y))$, $a = (0,0)$

ii) $f = 4(x + 2y)^2 - y^5$, $a = (0,0)$

iii) $f = x^2 + y^2 - 1$, $a = (1,0)$.

Lösung. Wir machen dies durch die Zerlegung in Formen.

i) Es gilt

$$f = x + x^2 + x^2y.$$

Als solches ist $\mu_a(f) = 1$ und somit ist f regulär. Die Tangente ist somit auch $x = 0$.

ii) Wir haben

$$\left(4x^2 + 16xy + 16y^2\right) - y^4,$$

weswegen $\mu_a(f) = 2$ ist. Somit ist f nicht regulär am Punkt a. Wir merken, dass die Tangente genau $x + 2y = 0$ ist, mit Multiplizität 2.

iii) Sei $z = x - 1$. Dann ist $x = z + 1$ und es gilt

$$f^T = (z+1)^2 + y^2 - 1 = 2z + \left(z^2 + y^2\right).$$

Somit is $\mu_a(f) = 1$ und f ist regulär am Punkt a. Des weiteren ist die Tangente $z = 0$, was $x = 1$ gibt. □

2 Schriftlich

Aufgabe 3. Sei f irreduzibel in $K[x, y]$. Ohne anzunehmen das K algebraisch abgeschlossen ist, beweise, dass $\mathrm{V}(f)$ topologisch irreduzibel ist wenn $\mathrm{V}(f)$ unendlich viele Punkte hat. Zeige zudem, dass in diesem Fall

$$\mathrm{I}(\mathrm{V}(f)) = (f)$$

gilt.

Lösung. Sei $g \in \mathrm{I}(\mathrm{V}(f))$. Dann ist $\mathrm{V}(f) \subseteq \mathrm{V}(g)$, also ist $\mathrm{V}(f, g) = \mathrm{V}(f)$ unendlich. Laut Satz 2.1.2 müssen also f und g einen gemeinsamen Teiler haben. Die Irreduzibilität von f impliziert nun, dass $f|g$, daher, $g \in (f)$. Wir haben bewiesen, dass $\mathrm{I}(\mathrm{V}(f)) \subseteq (f)$. Die andere Seite gilt immer, daher haben wir die Gleichheit gezeigt.

Dies zeigt auch, dass $\mathrm{I}(\mathrm{V}(f))$ ein Primideal ist, da aus $f \in K[x, y]$ irreduzibel folgt, dass $(f) \subseteq K[x, y]$ prim ist. Satz 1.2.50 besagt nun die Irreduzibilität von $\mathrm{V}(f)$. □