Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 4

Fragen oder Fehler, bitte an ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de. Kommentare können auch im Online-Notepad https://zumpad.zum.de/una-MTH-2550-7930-23 hinterlassen werden.

Die mündlichen Aufgaben werden in der Nachholübung am Montag (22/05) um 17:30 Uhr besprochen. Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist Donnerstag (24/05) um 17:30 Uhr.

1 Mündlich

Aufgabe 1. Beweise Proposition 1.4.13. Mit anderen Worten, zeige, dass die Zuordnungen $(-)^*$ und $(-)^!$ Identitäten und Kompositionen respektieren. Folgere, dass Isomorphismen genau auf Isomorphismen abgebildet werden.

Beweis. Beweis wird genau wie in der Vorlesung für Koordinatenringe gemacht. □

Aufgabe 2. Es sei $f \in K[x,y]$ und $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$. Untersuche, ob V isomorph zu einer Geraden (also zu $\mathbb{A}^1$) ist für die folgenden Werte von f:

i) $f = y - x^2$. *Hinweis: Zeige* $K[V] \simeq K[x]$.

ii) $f = y^2 - x^3$. *Hinweis: Bemerke, dass es einfacher ist Terme in Unterringen von freien Ringen zu faktorisieren, als in Quotientenringen von freien Ringen. Wie kann man* $K[\mathrm{V}]$ *als ein Unterring sehen? Es kann auch die Beobachtung helfen, dass* $(x^3 - y^2)g$ *keinen freien Term, oder Term vom Grad* 1 *hat. (Andere Lösungsansätze sind natürlich auch möglich.)*

iii) $f = 1 - xy$. *Hinweis: Betrachte die Einheiten im Koordinatenring.*
Zusatz: Wie kann man $V(f)$ mit einer Geraden in Verbindung bringen?

Lösung. Als erstes merken wir, dass alle 3 Polynome irreduzibel sind und somit sind die Hauptideale mit denen erzeugt prim, sprich radikal. Es gilt daher $K[x,y]/\mathrm{I}(\mathrm{V})) = K[x,y]/f$.

i) Dies ist sehr einfach, da $K[\mathrm{V}] = K[x,y]/(y - x^2)$. Wir bauen nun die Isomorphie

$$K[x,y]/(y - x^2) \to K[t]$$

wie folgt auf:

$$x \mapsto t, y \mapsto t^2$$

und

$$t \mapsto x.$$

Es ist klar, dass die Hin-und-zurück die Identitäten sind.

ii) Es gilt zu beweisen, dass $K[x,y]/(y^2 - x^3)$ nicht isomorph zu $K[t]$ ist. Dazu merken wir, dass $K[t]$ ein Faktorring ist. Wir wollen nun beweisen, dass $K[\mathrm{V}]$ kein Faktorring ist. *Dies kann man machen, indem man merkt, dass* $\overline{y}^2 = \overline{x}^3$. *Man muss aber zeigen, dass* $\overline{y}$ *irreduzibel ist. Dies ist nicht sonderlich schwer, braucht aber etwas argumentation. (Bei* $\overline{x}^3$ *muss man dies nicht machen, da man auch wie folgt argumentieren kann: Das Ideal* $(\overline{y})$ *ist nicht prim, denn* $\overline{x} \notin (\overline{y})$ *aber* $\overline{x}^3 \in (\overline{y})$. *Einfacher ist es aber, wie folgt zu argumentieren:*

Definiere ein K-Algebrahomomorphismus $\varphi : K[x,y] \to K[t]$ wie folgt:

$$x \mapsto t^2, t \mapsto t^3.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass $\mathsf{Ker}(\varphi) = (x^3 - y^2)$: Nämlich, sei

$$\begin{aligned} g \in \mathsf{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(g) = 0 \\ &\Leftrightarrow g(\varphi(x), \varphi(y) = 0 \quad \text{(Bemerkung in der Vorlesung)} \\ &\Leftrightarrow g(t^2, t^3) = 0. \end{aligned}$$

In anderen Worten, g ist ein Polynomial in zwei Variablen, so dass für alle $a \in K$, $g(a^2, a^3) = 0$. Sprich, für jeden Punkt von $\mathbb{A}^2$ für den $y^2 - x^3 = 0$ wird auch g Null. Das Korollar 1.2.43 vom Hilberts Nullstellenstatz besagt nun, dass es ein $n \geq 0$ gibt, so dass $g^n = (y^2 - x^3)h$, sprich $g^n \in (y^2 - x^3) \Leftrightarrow g \in \sqrt{(y^2 - x^3)} = (y^2 - x^3)$.

Die andere Seite ist trivial. Es folgt, dass $\mathsf{Ker}(\varphi) = (x^3 - y^2)$. Somit besagt der Hauptisomorphiesatz

$$K[\mathrm{V}] \simeq \mathsf{Im}(\varphi)\{a_0 + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots\}.$$

Nun merkt man einfach, dass $t^6 \in \mathsf{Im}(\varphi)$ als $t^2 t^2 t^2$ und $t^3 t^3$ dargestellt werden kann, wobei t^2 und t^3 irreduzibel sind. (Wenn S ein Unterring von R ist, ist jede Zerlegung von in S auch eine Zerlegung in R.)

iii) Dies ist klar, da wir in $K[\mathrm{V}]$ Einheiten haben (sprich x, y) welche nicht in K liegen. Bei einer K-Algebraisomorphismus kann dies nicht passieren. □

Aufgabe 3. i) Sei $\mathrm{V} = \mathrm{V}(y - x^2, z - x^3)$. Beweise, dass $\mathrm{V} \simeq \mathbb{A}^1$ durch das Aufbauen von polynomialen Abbildungen.

ii) Finde $\mathrm{I}(\{(t^2, t^3) \mid t \in K\})$.

Lösung. i) Wir definieren $\varphi : \mathrm{V} \to \mathbb{A}^1$ und $\psi : \mathbb{A}^1 \to \mathrm{V}$ wie folgt:

$$\varphi(a, b, c) = a$$

und

$$\psi(t) = (t, t^2, t^3).$$

Beide sind klar polynomial. Es gilt $\psi \circ \varphi(a, b, c) = \psi(a) = (a, a^2, a^3)$. Da aber $x^2 = y$ und $z^3 = x$ allgemein in V gilt, muss $a^2 = b$ und $a^3 = c$ gelten, sprich $(a, a^2, a^3) = (a, b, c)$.
Auf der anderen Seite gilt $\varphi \circ \psi(a) = \varphi(a, a^2, a^3) = a$ und wir sind fertig.

ii) Sei $\mathrm{V} = \{(t^2, t^3) \mid t \in K\}$. Die Bijektion $\mathrm{V} \simeq \mathrm{V}(x^3 - y^3)$ wurde in der Vorlesung gezeigt. Der Grund warum es hier nochmal steht ist um zu zeigen was schief geht: Das Problem ist nicht, dass man $\mathrm{V}(x^3 - y^2)$ nicht Parametrisieren kann. Das Problem ist, dass man es nur, dass die Rückabbildung nicht Polynomial ist. Würde man beiden Varietäten die Null raus nehmen, wären diese auch Isomorph. □

2 Schriftlich

Definition 2.0.1. Eine Teilmenge $T \subseteq X$ eines topologischen Raumes X wird *dicht* genannt, wenn der Abschluss $\overline{T}$ von T (kleinste abgeschlossene Menge welches T enthält) ganz X ist. Sprich $\overline{T} = X$.

Aufgabe 4. i) Beweise, dass ein topologischer Raum genau dann irreduzibel ist, wenn jede offene nichtleere Teilmenge dicht ist.

ii) Sein $f, g, h \in K[x,y]$ mit $h \neq 0$ und $f(a) = g(a)$ für jeden $a \in \mathbb{A}^2 \setminus \mathrm{V}(h)$. Daher für jeden a, so dass $h(a) \neq 0$. Beweise, dass $f = g$.

Beweis. i) Sei X irreduzibel und $\varnothing \neq U \subseteq X$ offen. Dann ist

$$(X \setminus U) \cup \overline{U}$$

eine zerlegung in abgeschlossenen Mengen, wobei $\overline{U}$ den Abschluss von U bezeichnet. Da X irreduzibel ist, muss $X = X \setminus U$ (sprich $U = \varnothing$ oder $X = \overline{U}$ gelten. Daher ist U dicht.

Sei wiederum jede offene Teilmenge in X dicht. Sein $U, V \subseteq X$ offen, so dass $U \cap V = \varnothing$. Es folgt, dass $V \subseteq U^{\mathsf{c}}$. Um zu zeigen, dass X irreduzibel ist, müssen wir zeigen, dass U oder V leer sind (wir benutzen die äquivalente Definition von irreduzibel, welche mit offenen statt abgeschlossenen Mengen gegeben wird, sieh AB1). Wenn $U \neq \varnothing$ folgt, dass $U^{\mathsf{c}} \neq X$ und somit haben wir, dass $V \subseteq U^{\mathsf{c}} \subsetneq X$. Da U^{c} abgeschlossen ist (Komplement einer offenen Menge) muss $\overline{V} \subsetneq X$ gelten und wir haben einen Widerspruch zu Dichtheit.

ii) Gelte $f = g$ auf einer nichtleeren offenen Menge $\varnothing \neq D(h)$. Da $f - g = 0$ eine Varietät definiert, muss $f = g$ auf einer abgeschossenen Menge gelten, sprich auf dem Abschluss von $D(h)$. Da jedoch $\mathbb{A}^n$ in der Zariski Topologie irreduzibel ist, muss der Abschluss von $D(h)$ ganz $\mathbb{A}^n$ sein. Somit stimmen f und g auf ganz $\mathbb{A}^n$ überein. □

Aufgabe 5. Sein V und W irreduzibel und $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine polynomiale Abbildung und $a \in \mathrm{V}$ ein Punkt.

i) Beweise, dass $\mathfrak{m}_{\varphi(a)} = (\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_a)$. In Worten ausgedrückt, dass das Maximalideal assoziiert zum Punkt $\varphi(a) \in \mathrm{W}$ genau das Urbild des Maximalideals assoziiert zum Punkt $a \in \mathrm{V}$ ist.

ii) Zeige, dass es einen kanonischen K-Algebrahomomorphismus

$$\varphi_a^* : \mathcal{O}_{\varphi(a)}(\mathrm{W}) \to \mathcal{O}_a(\mathrm{V})$$

induziert.

Lösung. i) Es gilt

$$\mathfrak{m}_{f(a)} = \{g \in K[y] \mid g(f(a)) = 0\}$$

bei Definition. Auf der anderen Seite gilt

$$\begin{aligned}(\varphi^*)^{-1} &= \{g \in K[y] \mid f * (g) \in \mathfrak{m}_a\} \\ &= \{g \in K[y] \mid g \circ f \in \mathfrak{m}_a\} \\ &= \{g \in K[y] \mid g(f(a)) = 0\}\end{aligned}$$

und somit folgt die Gleichheit. Hier haben wir die Definition von φ^* benutzt.

ii) Wie in der Vorlesung argumentiert gilt

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\varphi(a)}(W) & \dashrightarrow & \mathcal{O}_a \\ \downarrow{\scriptstyle \sim} & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ (K[W])_{(\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_a)} & \xrightarrow[\varphi^*_{\mathfrak{m}_a}]{} & K[\mathrm{V}]_{\mathfrak{m}_a}, \end{array}$$

wobei wie hier für die linke untere Ecke Teil (i) benutzt haben. Wir habe schon für allgemeine Lokalisierungen argumentiert, dass das Urbildnehmen eine Abbildung induziert. Somit wird der obere Pfeil als die Komposition der anderen Drei definiert. Hier ist zu beachten, dass der linke, und insbesondere der rechte Pfeil Isomorphien sind, als solches können wir das Inverse nehmen. □

Aufgabe 6. Sei V irreduzibel. Beweise, dass es einen Isomorphismus

$$\bigcap_{a \in \mathrm{V}} \mathcal{O}_a(\mathrm{V}) \simeq K[\mathrm{V}]$$

gibt. *Alternativ* zeige die vereinfachte Version: Dass es einen Isomorphismus

$$\bigcap_{a \in \mathbb{A}^2} \mathcal{O}_a \simeq K[x, y]$$

gibt.

Beweis. Für einen $f \in K(\mathrm{V}) = \mathsf{Q}(K[\mathrm{V}])$, definiere

$$J_f^{\mathrm{V}} := \{g \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid \overline{g} f \in K[\mathrm{V}]\}.$$

Behauptung 1: $J_f^{\mathrm{V}} \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ ist ein Ideal. Dies ist direkt klar: Sein $g, h \in J_f^{\mathrm{V}}$ und $r \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Es gilt $\overline{gr} f = \overline{r}(\overline{g} f) \in K[\mathrm{V}]$ und $(\overline{g} + \overline{h}) f = \overline{g} f + \overline{h} f \in K[\mathrm{V}]$ und wir sind fertig.

Behauptung 2: $\mathrm{V}\left(J_f^{\mathrm{V}}\right) = \{a \in \mathrm{V} \mid f(a) \text{ ist nicht definiert}\}$. Als erstes merken wir, dass $\mathrm{V}\left(J_f^{\mathrm{V}}\right) \subseteq \mathrm{V}$, da die Bedingung sich auf $K[\mathrm{V}]$ bezieht und somit invariant ist unter der Repräsentation von $\overline{g}$. Sei $f = \frac{\alpha}{\beta}$, mit $\alpha \in K[\mathrm{V}]$ und $\beta \in K[\mathrm{V}]^*$, wobei die Repräsentanten so gewählt sind, dass $\beta(a) \neq 0$.

Für die Beschränkung, sei $a \in \mathrm{V}\left(J_f^{\mathrm{V}}\right)$, sprich $g(a) = 0$ für alle $g \in J_f^{\mathrm{V}}$. Das erste Bemerkung ist, dass $\hat{\beta} \in J_f^{\mathrm{V}}$. Als solches ist auch $\beta(a) = 0$ und somit ist f auf a nicht definiert.

Andersrum, sei $\beta(a) = 0$. Damit $\overline{g} f = \frac{\overline{g}\alpha}{\beta} \in K[\mathrm{V}]$ muss $(\overline{g}\alpha)(a) = 0$ sein. Bei Annahme von α, β muss $\alpha(a) \neq 0$ sein und somit ist $\overline{g}(a) = 0$.

Sei $f \in \bigcap_{a \in \mathrm{V}} \mathcal{O}_a(V)$. Dann ist $J_f^{\mathrm{V}} = \varnothing$, da laut Behauptung 2, $\mathrm{V}\left(J_f^{\mathrm{V}}\right)$ genau die Punkte von V, wo $f(a)$ nicht definiert ist. Bei Definition von f aber ist es an jedem Punkt von V definiert.

Es folgt vom Nullstellensatz, dass $1 \in J_f^{\mathrm{V}}$. Die Definition von J_f^{V} aber besagt nun, dass $f \in K[\mathrm{V}]$. Es folgt $\bigcap_{a \in \mathrm{V}} \mathcal{O}_a(V) \subseteq K[\mathrm{V}]$.

Die andere Seite ist trivial, da $\mathcal{O}_a(\mathrm{V}) \simeq K[\mathrm{V}]_{\mathfrak{m}_a}$. Aus V irreduzibel folgt die Integrität von $K[\mathrm{V}]$ und somit wird es nach der Lokalisation gröser. Somit liegt $K[\mathrm{V}]$ in $\mathcal{O}_a(\mathrm{V})$ für jeden a und damit auch im Schnitt. □