Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 3

1 Mündlich

Aufgabe 1. Seien $I, J \subseteq R$ Ideale. Zeige folgende Aussagen und finde Gegenbeispiele für die umgekehrten Teilmengenbeziehungen.

i) $\sqrt{I}\sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$ und $\sqrt{\sqrt{I}\sqrt{J}} = \sqrt{IJ}$.

ii) $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I+J}$ und $\sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} = \sqrt{I+J}$.

iii) $IJ \subseteq I \cap J$ und $\sqrt{IJ} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$.

Lösung. i) $\sqrt{I}\sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$: Sei $a \in \sqrt{I}\sqrt{J}$. In anderen Worten, es gibt $x, y \in R$ und $n, m \geq 0$, so dass $x^n \in I$, $y^m \in J$ und $a = x^n y^m$. Als solches gibt es ein $k \geq 1$ ($k = 1$), so dass $a^k = rs$, mit $r \in I$, $s \in J$. Hier sind $r = x^n$, $s = y^m$.
Gegenbeispiel: Sein $R = K[X]$, $I = (x) = J$. Dann gilt $\sqrt{(x)} = (x)$, $\sqrt{(x)}\sqrt{(x)} = (x)(x) = (x^2)$, aber $IJ = (x)(x) = (x^2)$ und somit ist $\sqrt{IJ} = (x) \neq (x^2)$.
$\sqrt{\sqrt{I}\sqrt{J}} \subseteq \sqrt{IJ}$: Sei $a \in \sqrt{\sqrt{I}\sqrt{J}}$, sprich $a^n = xy$, mit $x^m \in I$, $y^k \in J$. Sei $d = \max m, k$. Es gilt $a^{(n+d)} = x^d y^d \in IJ$ und wir sind fertig.
$\sqrt{\sqrt{I}\sqrt{J}} \supseteq \sqrt{IJ}$: Dies ist klar.

ii) $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I+J}$: Sei $a \in \sqrt{I} + \sqrt{J}$, also $a = x + y$, sodass $x^n \in I$ und $y^m \in J$. Sei $d = \max n, m$ und betrachte $a^{2d} = (x+y)^{2d}$. Unter anwendung der binomischen Formel wissen wir, dass jeder Summand entweder in I oder in J liegt (oder beide). Sei u die Summe alle Summanden, welche in I liegen. v sei die Summe aller anderen. Es ist klar, dass $u \in I$ und $v \in J$, mit $a^{2d} = u + v$, wie gewohlt.
Gegenbeispiel: Sei $R = \mathbb{Z}[x]$ und betrachte $I = (x^2+2)$ und $J = (2)$. Es folgt, $\sqrt{I} + \sqrt{J} = I + J = (x^2)$. Auf der anderen Seite ist $\sqrt{I+J} = \sqrt{(x^2)} = (x)$.
$\sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} = \sqrt{I+J}$: Sei $x \in \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$. Daher $a^n = x + y$ mit $x^m \in I$ und $y^k \in J$. Betrachte $a^{n(m+k)} = (x+y)^{m+k}$. Von der binomischen Formel ist es wieder klar, dass es dies als $u + v$ dargestellt werden kann, wobei $u \in I$ und $v \in J$ und somit sind wir fertig.
$\sqrt{I+J} \subseteq \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$: Dies ist einfach.

iii) $IJ \subseteq I \cap J$: Dies ist klar.
Gegenbeispiel: Sei $I = J = (x)$.
$\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$: Ist auch klar.
$\sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I \cap J}$: Es gibt $n, m \geq 0$, so dass $a^n \in I$ und $a^m \in J$. Sei $d = \max n, m$. Somit ist $a^d \in I \cap J$ und wir sind fertig.
$\sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{IJ}$: Sei $a^d \in \cap I \cap J$. Dann ist $a^{2d} = a^d a^d \in \sqrt{IJ}$ und wir sind fertig. □

Aufgabe 2.

i) Formuliere die Definition einer irreduziblen Teilmenge mithilfe offener Mengen.

ii) Beweise, dass in der gewöhnlichen, von einer Norm induzierten Topologie auf $\mathbb{R}^n$, die irreduzible Mengen genau die Punkte sind.

Lösung. i) Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt irreduzibel, wenn keine nichtleeren offenen Teilmengen von Y paarweise disjunkt sind. Formell, für alle offenen Teilmengen $\varnothing \neq U_1, U_2 \subseteq Y$ gilt $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.

ii) Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ und schränke die Topologie von $\mathbb{R}^n$ auf Y ein. Man nehme man, dass es Punkte $x, y \in Y$ gibt, so dass $x = neqy$. Wir können offene Mengen $U_x, U_y \subseteq \mathbb{R}^n$ finden, so dass $U_x \cap U_y = \varnothing$. Da, bei Definition der eingeschränkten Topologie $U_1 = U_x \cap Y$ und $U_2 = U_y \cap Y$ offen in Y sind, aber deren Schnitt leer ist, kommen wir zum Widerspruch.

Im englischen heißen diese auch "hyperconnected" spaces. □

Aufgabe 3. Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Varietät.

i) Beweise, dass $\overline{f} \in K[\mathrm{V}]$ genau dann eine Einheit ist, wenn $f(a) \neq 0$ jeden alle $a \in \mathrm{V}$.

ii) Sei R ein Ring und $a \in R$ ein nilpotentes Element. Beweise, dass $1 - a$ eine Einheit ist.

iii) Sei $\mathrm{V} = \mathrm{V}(J)$ für ein Ideal $J \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$. Für jedes $f \in \mathrm{I}(\mathrm{V})$ ist $1 + f$ eine Einheit in $K[x_1, \ldots, x_n]/J$.

iv) Bestimme alle Einheiten in $K[\mathrm{V}]$ von

   a) $\mathrm{V} = \mathrm{V}(y - x^2)$ und
   b) $\mathrm{V} = \mathrm{V}(xy - 1)$

   in $\mathbb{A}^2$.

Lösung. i) Sei $\overline{f} \in K[V]^*$, sprich, es gibt ein $\overline{g} \in K[V]$, so dass $\overline{fg} = 1$, also $fg(a) = 1$ für alle $a \in V$. Daher kann $f(a)$ nie die Null sein. Andersrum kann man $\overline{g}(a)$ durch $\frac{1}{\overline{f}(a)}$ definieren.

ii) Sei $a^n = 0$ mit $n \geq 1$. Es gilt

$$(1 - a)(1 + a + \cdots + a^{n-1}) = 1 - a^n = 1.$$

iii) Da $\mathrm{I}(\mathrm{V}(J)) = \sqrt{J}$, können wir sagen, dass $f \in \sqrt{J}$, sprich, es ein $n \geq 0$ gibt, so dass $f^n \in J$. Es folgt, dass $\overline{f} \in K[V]$ Nilpotent ist und somit können wir nun Teil ii) anwenden.

iv) a) Als erstes merken wir, dass $K[V] \simeq K[x]$. Über einem Integritätsbereich werden die Grade von Polynomen beim multiplizieren addiert. Es folgt, dass $f \in K[x]^*$ genau dann, wenn $\mathsf{grad}(f) = 0$. (Man erinnere sich, dass $\mathsf{grad}(0) = -\infty$ nicht $\mathsf{grad}(0) = 0$.) In anderen Worten, die $K[V]^* = K^*$.

b) Wir merken, das $K[V] \simeq K[x]_x \simeq K[x, x^{-1}]$ die Laurant-Polynome sind. Sein $f, g \in K[V]$. Es gilt

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 + a_{-1} x^{-1} + \cdots + a_{-m+1} x^{-m+1} + a_{-m} x^{-m}$$

und

$$g = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0 + b_{-1} x^{-1} + \cdots + b_{-l+1} x^{-l+1} + b_{-l} x^{-l},$$

wobei $m, n, l, k \geq 0$. Man betrachte nun den höchsten und niedersten Koeffizienten des Produkts: $u = n + k$ und $v = -m - l$. Aus $fg = 1$ folgt nun, dass $k = -n$ und $-l = m$. Da $n \geq -m$, folgt $-n \leq m$ nachdem wir mit -1 multiplizieren. Dies aber ergibt $k = -n \leq m = -l$. Auf der anderen Seite haben wir, von der Definition von g, dass $k \geq -l$. Beides können nur dann stimmen, wenn $k = -l$, daher, wenn g genau einen Summanden hat.

Das Gleiche Argument gibt uns, dass auch f ein Monomial ist. Es folgt, dass die Einheiten genau von der Form ax^n sind, wobei $a \in K^*$. Daher $K[V]^* \simeq \mathbb{Z} \times K^*$.

□

2 Schriftlich

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $J = \sqrt{J}$ ein Radikalideal. Beweise:

i) Es ist J der Schnitt all jener Primideale, welche J enthalten.

ii) Ist K algebraisch abgeschlossen und $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, so ist J der Durchschnitt all jener maximalen Ideale, welche J enthalten. (Hilberts Nullstellensatz und etwas "Geometrie" könnten hilfreich sein.)

Lösung. i) Wir fangen mit einem Lemma an:

Lemma 2.0.1. *Für einen Ring R gilt*

$$\sqrt{0} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}(R)} \mathfrak{p}.$$

*(*Spec *wurde in der Vorlesung nicht genant.)*

Beweis. Sei $\mathfrak{P} := \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}(R)} \mathfrak{p}$.
$\sqrt{0} \subseteq \mathfrak{P}$: Sei $x^n = 0 \in \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ prim ist, muss $a \in \mathfrak{p}$ sein. Da dies für beliebige Primideale gilt, muss $x \in \mathfrak{P}$ sein.
$\mathfrak{P} \subseteq \sqrt{0}$: Beweis durch Umkehrung (Kontraposition). Sei $x \notin \sqrt{0}$. Als solches ist $0 \notin \langle x \rangle := \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ und somit ist $x \neq 0$ in $R_x = \langle x \rangle^{-1} R$. Daher hat R_x ein Maximalideal: $\mathfrak{m}$. (Das Zornige Lemma.) Das Urbild $\gamma^{-1}(\mathfrak{m}) \subseteq R$ dieses Maximalideals unter der kanonischen Abbildung $R \to R_x$ ist ein Primideal welches x nicht enthält (da $\gamma(x) \in R_x^*$ und somit $\gamma(x) \notin \mathfrak{m}$). Somit ist $x \notin \mathfrak{P}$. □

Der allgemeine Fall folgt nun aus Aufgabe 6: Wir betrachten R/J. Dann sind korrespondieren die Ideale von R/I, welche 0 enthalten, genau zu den Idealen von R, welche J enthalten. □

Definition 2.0.2. Zur Erinnerung, ein Ring R heißt reduziert, wenn 0 das einzige nilpotente Element ist. Ein Element x heißt wiederum nilpotent, wenn es ein $n \geq 0$ gibt, so dass $x^n = 0$.

Aufgabe 5. Beweise, dass ein Ideal genau dann radikal ist, wenn der Koordinatenring der zugehörigen Varietät reduziert ist.

Lösung. □

Aufgabe 6. Sei R ein Ring, $I \subseteq J \subseteq R$ Ideale und $\pi : R \to R/I$ die kanonische Projektion. Beweise folgende Aussagen:

(i) Das Bild $\pi(J)$ ist ein Ideal von R/I (hier braucht man $I \subseteq J$ nicht).

(ii) Sei J ein Radikalideal. Dann ist $\pi(J)$ ein Radikalideal.

(iii) Sei $J = \mathfrak{p}$ prim. Dann ist $\pi(\mathfrak{p})$ ein Primideal.

(iv) Sei $J' \subseteq R/I$ ein Ideal. Es gilt

  (a) $I \subseteq \pi^{-1}(J')$,
  (b) $\pi(\pi^{-1}(J')) = J'$ und
  (c) $\pi^{-1}(\pi(J)) = J$.

(v) Ist $I \subseteq J' \subseteq R$ ein weiteres Ideal, so gilt $J \subseteq J'$ genau dann, wenn $\pi(J) \subseteq \pi(J')$ in R/I. Überdies ist $J = J'$ genau dann, wenn $\pi(J) = \pi(J')$.

(vi) Sei $J = \mathfrak{m}$ ein Maximalideal. Dann ist $\pi(\mathfrak{m})$ ein Maximalideal.

Lösung. (i) Da $0 \in J$ und $\pi(0) = 0$, ist $0 \in \pi(J)$. Sein $a, b \in \pi(J)$. Daher gibt es $x, y \in J$, so dass $\pi(x) = a$, $\pi(y) = b$. Es gilt $a+b = \pi(x)+\pi(y) = \pi(x+y) \in \pi(J)$ und somit ist es unter der Addition abgeschlossen. Da π surjektiv ist, gibt es für jeden $r \in R/I$ einen $z \in R$, so dass $\pi(z) = r$. Daher folgt $ra = \pi(z)\pi(x) = \pi(zx) \in \pi(J)$ und $\pi(J)$ ist ein Ideal.

(ii) Man nehme $a \in \sqrt{\pi(J)}$. Daher, es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a^N \in \pi(J)$. Da π surjektiv ist, gibt es ein $x \in R$, so dass $\pi(x) = a$. In anderen Worten, $\pi(x^N) = (\pi(x))^N \in \pi(J)$. Als solches gibt es ein $y \in J$, so dass $\pi(x^N) = \pi(y)$, was $\pi(x^N - y) = \pi(x^N) - \pi(y) = 0$ in R/I und damit $x^N - y \in I \subseteq J$ impliziert. Da aber $y \in J$, folgt $x^N \in J$. Aus J radikal folgt $x \in J$ und daher $a = \pi(x) \in \pi(J)$, was die Radikalität von $\pi(J)$ beweist.

(iii) Sei $ab \in \pi(\mathfrak{p})$. Da π eine Surjektion ist, folgt, dass es $x, y \in R$ gibt, mit $\pi(x) = a$ und $\pi(y) = b$. Dann gilt $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y) = ab \in \pi(\mathfrak{p})$. Als solches ist xy im Bild von $\mathfrak{p}$ unter π. Es folgt, dass $\pi(xy - ab) = \pi(xy) - \pi(ab) = 0$ in R/I, was $xy - ab \in \mathsf{Ker}(\pi) = I \subseteq \mathfrak{p}$ liegt. Wir haben $ab \in \mathfrak{p}$, woraus wir $xy \in \mathfrak{p}$ schlussfolgern können. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, können wir, ohne Verlust von Allgemeinheit, $x \in \mathfrak{p}$ sagen, was nun $\pi(x) \in \pi(\mathfrak{p})$ und damit die Primheit von $\pi(\mathfrak{p})$ impliziert.

(iv) Da $\pi(I) = 0 \in J'$ folgt (a) und (b) ist reine Mengentheorie. Es bleibt also nur (c). Sei $a \in \pi^{-1}(\pi(J))$. Daher, $\pi(a) \in \pi(J)$. Es gibt also ein $x \in J$, so dass $\pi(a) = \pi(x)$. Daher, $\pi(a - x) = \pi(a) - \pi(x) = 0$ in R/I, was $x - a \in I \subseteq J$ impliziert. Da aber $x \in J$, muss auch $a \in J$ sein. Dass $J \subseteq \pi^{-1}(\pi(J))$ ist reine Mengentheorie.

(v) Dies folgt von Teil (iv) und der Tatsache, dass das Urbild die Ordnung erhält.

(vi) Sei $\pi(\mathfrak{m}) \subseteq J' \subseteq R/I$. Von Teil (iv) wissen wir, dass es ein $A = \pi^{-1}(J') \subseteq R$ gibt, mit $\pi(A) = J'$. Daher haben wir $\mathfrak{m} \subseteq A \subseteq R$ und es folgt, dass $A = \mathfrak{m}$ oder $A = R$. Wir schlussfolgern, dass $J = \pi(\mathfrak{m})$ oder $J = R/I$, was die Maximalität beweist. Zuletzt gilt zu zeigen, dass $\pi(\mathfrak{m}) \neq R/I$. Doch dies folgt auch von Teil (v), da $\mathfrak{m} \neq R$. □