Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 2

Unverständnisse, Fragen oder Fehler, bitte an
ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de

Die mündlichen Aufgaben werden Donnerstag (04/05) besprochen. Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist Montag (08/05) um 17:30. (Oder vielleicht später, wenn die Übung verschoben wird.) Viel Glück und viel Erfolg.

1 Aufgaben

1.1 Mündlich

Aufgabe 1. Beweise, dass die Lokalisierung $S^{-1}R$ in natürlicher Weise die Struktur einer R-Algebra trägt, wobei die Multiplikation durch

$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) \coloneqq (r_1 r_2, s_1 s_2)$$

und die Addition durch

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) \coloneqq (r_1 s_2 + r_2 s_1, s_1 s_2)$$

gegeben ist.

Lösung. Zuerst zeigen wir, dass $S^{-1}R$ ein Ring ist.

Ä) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation: Reflexivität und Symmetrie sind klar. Sein $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ und $(r_2, s_2) \sim (r_3, s_3)$. Es gibt also t_1, t_2, so dass $t_1 r_1 s_2 = t_1 r_2 s_1$ und $t_2 r_2 s_3 = t_2 r_3 s_2$. Indem man $t_3 \coloneqq t_1 t_2 s_2$ nimmt, erhält man die Transitivität (wofür man das t gebraucht hat).

K) Nun muss man auch beweisen, dass dies eine Kongruenzrelation ist, sprich, sich mit der Struktur verträgt. In unserem Fall, die Summe und das Produkt. Sein dafür $(r_1, s_1) \sim (a_1, b_1)$ und $(r_2, s_2) \sim (a_2, b_2)$, wobei t_1 und t_2 die zugehörigen Äquivalenzen auslösen. Dann induziert $t_1 t_2$ die Gleichungen:

S)

$$\begin{aligned} t_1 t_2 (r_1 s_2 + r_2 s_1) b_1 b_2 &= t_1 r_1 b_1 t_2 s_2 b_2 + t_2 r_2 b_2 t_1 s_1 b_2 \\ &= t_1 a_1 s_1 t_2 s_2 b_2 + t_2 a_2 s_2 t_1 s_1 b_1 \\ &= t_1 t_1 (a_1 b_2 + a_2 b_1) s_1 s_2, \end{aligned}$$

was uns $(r_1 s_2 + r_2 s_1, s_1 s_2) \sim (a_1 b_2 + a_2 b_1, b_1 b_2)$ gibt.

P)

$$t_1 t_2 r_1 r_2 b_1 b_2 = t_1 t_2 a_1 a_2 s_1 s_2,$$

was uns $(r_1 r_2, s_1 s_2) \sim (a_1 a_2, b_1 b_2)$ gibt.

Zu zeigen, dass dies ein R-Algebra ist, bauen wir den Ringhomomorphismus $R \to S^{-1}R$ durch $r \mapsto (r,1)$ auf. Dies ist klar ein Ringhomomorphismus. (Maximal ist hier die Summe zu überprüfen, dies ist aber auch trivial). □

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $f = gh \in R$ ein Element. Beweise, dass $R_f \simeq (R_g)_h$, wobei wir mit h das kanonische Element $\frac{h}{1} \in R_g$ meinen.

Lösung. Wir können dies direkt beweisen, indem wir Isomorphien $\alpha : R_f \to (R_g)_h$, $\alpha(r,s) := ((r,s),1)$ und $\beta : (R_g)_h \to R_f$, $\beta((a,b),c) := (a,bc)$ aufbauen. Wir werden aber die Isomorphie $R_a \simeq R[t]/(ta-1)$ benutzen: Definiere

$$\alpha : R[x]/(xgh-1) \to R[y,z]/(yg-1, zh-1), \quad x \to yz$$

$$\beta : R[y,z]/(yg-1, zh-1) \to R[y,z]/(xgh-1), \quad y \to xh, z \to xg.$$

Hier benutzen wir die Isomorphie

$$(R[y]/(yg-1))\,[z]/(zh-1) \simeq R[y,z]/(gy-1, hz-1).$$

Die Abbildungen α, β sind wohldefiniert, da $\alpha(x)gh - 1 = yzgh - 1 = 0$ und $\beta(y)g - 1 = xhg - 1 = \beta(z)h - 1 = 0$. Da wir die Abbildungen auf den Erzeugern geben, werden diese nun eindeutige R-Algebrahomomorphismen definieren.

Diese sind auch invers zueinander, da

$$x \mapsto yz \mapsto xhxg = x(xgh) = x$$

und

$$y \mapsto xh \mapsto yzh = y, \quad z \mapsto xg \mapsto yzg = z.$$

□

Aufgabe 3. Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge und $\alpha : R \to T$ ein Ringhomomorphismus, so dass $\alpha(S) \subseteq T^*$ in den Einheiten landet. Beweise, dass es genau einen Ringhomomorphismus $\alpha_* : S^{-1}R \to T$ gibt, so dass $\alpha_* \circ \gamma = \alpha$, wobei $\gamma : R \to S^{-1}R$ die kanonische Abbildung ist.

Lösung. Wir definieren $\alpha_* : S^{-1}R \to T$ durch $(r,s) \mapsto \alpha(r)\alpha(s)^{-1}$. Dies ist erlaubt, da bei Definition, $\alpha(s) \in T^*$ eine Einheit für alle $s \in S$ ist. Zu zeigen, dass dies ein Ringhomomorphismus ist, ist einfach. Wir zeigen dies nur an der Addition:

$$\begin{aligned}
\alpha_*(r_1s_2 + r_2s_1, s_1s_2) &= \alpha(r_1s_2 + r_2s_1)\alpha(s_1s_2)^{-1} \\
&= (\alpha(r_1)\alpha(s_2) + \alpha(r_2)\alpha(s_1))\alpha(s_1)^{-1}\alpha(s_2)^{-1} \\
&= \alpha(r_1)\alpha(s_1)^{-1} + \alpha(r_2)\alpha(s_2)^{-1} \\
&= \alpha_*(r_1,s_1) + \alpha_*(r_2,s_2).
\end{aligned}$$

Da $\alpha(1)^{-1} = 1$ ist auch klar, dass für alle $r \in R$, wir $\alpha_* \circ \gamma(r) = \alpha(r)$ haben.

Es bleibt die Eindeutigkeit nachzuweisen. Sei $\beta : S^{-1}R \to T$ gegeben, so dass $\beta \circ \gamma = \alpha$. Die Kommutativität (letzte Gleichung), besagt, dass für alle $r \in R$, wir $\beta(r,1) = \alpha(r)$ haben. Auf der anderen Seite, muss

$$1 = \beta(1,1) = \beta((s,1)(1,s)) = \alpha(s)\beta(1,s)$$

gelten. Sprich, $\beta(1,s) = \alpha(s)^{-1}$ und somit ist

$$\beta(r,s) = \beta((r,1)(1,s)) = \alpha(r)\alpha(s)^{-1} = \alpha_*(r,s)$$

und wir sind fertig. □

1.2 Schriftlich

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $I \subseteq J \subseteq R$ Ideale von R. Beweise, dass $R/J \simeq (R/I)/(J/I)$.

Lösung. Zuerst beweisen wir, dass $J/I \subseteq R/I$ ein Ideal ist. Es gilt $0 + I \subseteq J/I$, da $0 \in J$. Sein $a + I, b + I \in J/I$. Aus $a, b \in J$ folgt $a + b \in J$ und somit $a + b + J \in J/I$ und gleichfalls ist auch $ra + I \in J/I$ für alle $r \in R$.

Definiere die Abbildung

$$\varphi : R/I \to R/J, \quad r + I \mapsto r + J.$$

Es ist wohldefiniert, da $I \subseteq J$: Sei nämlich $r + I = r' + I$ in R/I. Daher $r - r' \in I \subseteq J$ und somit gilt $r + J = r' + J$.

Der Kern der Abbildung ist

$$\mathsf{Ker}(\varphi) = \{r + I \mid \varphi(r + I) = 0 + J\} = \{r + I \mid r + J = 0 + J\} = \{r + I \mid r \in J\} = J/I.$$

Der Hauptisomorphiesat impliziert nun die Aussage. □

Aufgabe 5. Sei $R = K[x, y, z]/(xy - z^2)$ und $S = K[s, t]$.

i) Beweise, dass R ein Integritätsbereich ist. (Man darf die Tatsache benutzen, dass ein Hauptideal (f) in $K[x_1, \ldots, x_n]$ genau dann prim ist, wenn f irreduzibel ist.)

ii) Da x, y, z irreduzibel in R sind, gilt $R \ncong S$. Seien $Q(R) = (R \setminus \{0\})^{-1}R$ und $Q(S) = (S \setminus \{0\})^{-1}S$ die Quotientenkörper von R und S. Ist $Q(R) \simeq Q(S)$?

Lösung. i) Es gilt zu zeigen, dass $(xy - z^2) \subseteq K[x, y, z]$ ein Primideal ist. Laut unserer Annahme muss man nur zeigen, dass $xy - z^2$ irreduzibel in $K[x, y, z]$ ist. Es ist von der Form $z^2 = d$ über $K[x, y][z]$, wobei $d \in K[x, y]$. Da es klar kein Polynom $f(x, y) \in K[x, y]$ gibt, so dass $f^2 = xy$ gilt, sind wir fertig.

ii) *(Es wurde nicht gefragt, aber, so kann man beweisen, dass R uns S nicht isomorph sind: Es ist klar, dass $z^2 \in R$ nicht irreduzibel ist. Jedoch ist $(z^2) \subseteq R$ ein Primideal, da*

$$R/(z^2) \simeq K[x, y, z]/(xy - z^2, z^2) \simeq K[x, y]/(xy)$$

was freilich kein Integritätsbereich ist, da $xy = 0$. Unsere Annahme besagt nun, dass R und S nicht isomorph sein können.)

Man kann eine direkte Isomorphie aufbauen. Einfacher ist es, Homomorphismen $R \to \mathsf{Q}(S)$, $S \to \mathsf{Q}(R)$ aufzubauen und dann durch die jeweiligen universellen Eigenschaften die gewünschten Homomorphismen aufzubauen. Schließlich muss man alle Eigenschaften überprüfen.

Wir gehen aber etwas anders voran: Zuerst beweisen wir folgendes Lemma:

Lemma 1.2.1. *Sei $T \subseteq S$ eine Teilmenge, so dass $S, T \subseteq R$ beide multiplikative Teilmengen des Ringes R sind. Es gilt*

$$\gamma(S)^{-1}\left(T^{-1}R\right) \simeq S^{-1}R.$$

Spezifisch ist also $\mathsf{Q}(R)$ eine Lokalisierung einer beliebigen Zwischenlokalisierung $M^{-1}R$, so lange $0 \notin M$.

Mit $\gamma(S)^{-1}\left(T^{-1}R\right)$ meinen wir folgendes: Wir lokalisieren R mit T, betrachten das Bild von S unter der kanonischen Abbildung $\gamma : R \to T^{-1}R$ und lokalisieren den Ring $T^{-1}R$ mit diesem Bild.

Beweis. Definiere die Abbildung $\alpha : \gamma(S)^{-1}\left(T^{-1}R\right) \to S^{-1}R$ durch

$$((r, t), (s, 1)) \mapsto (r, st).$$

(Man mache sich klar, wie ein Element von $\gamma(S)^{-1}\left(T^{-1}R\right)$ aussieht.) Es macht Sinn, da $T \subseteq S$ und somit ist $st \in S$. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies ein R-Algebrenhomomorphismus ist. Die Umkehrabbildung $\beta : S^{-1}R \to \gamma(S)^{-1}\left(T^{-1}R\right)$ definieren wir durch

$$(r, s) \mapsto ((r, 1), (s, 1)).$$

Diese sind invers zueinander, da

$$((r,t),(s,1)) \mapsto (r,st) \mapsto ((r,1),(st,1))$$

und

$$(r,s) \mapsto ((r,1),(s,1)) \mapsto (r,s).$$

Hier merke man, dass $((r,t),(s,1)) \sim ((r,1),(st,1))$ in $((r,t),(s,1))$, da $(r,t)(st,1) = (rst,t) \sim (s,1)(r,1)$ in $T^{-1}R$. □

Denn Beweis der Aufgabe schließen wir nun wie folgt ab: Betrachte zuerst die Lokalisierungen R_y und S_s. Hierzu benutzen wir die Formel von der Vorlesung.

$$R_x \simeq R[u]/(ux-1) = K[x,y,z,u]/(xy-z^2, ux-1) \simeq K[x,z,u]/(ux-1)$$

$$S_s \simeq S[v]/(vs-1) = K[s,t,v](vs-1).$$

In der obigen Formel haben wir hier folgende Überlegung gemacht:

$$xy - z^2 \in I \Rightarrow uxy - uz^2 = y - uz^2 \in I.$$

Dies aber besagt, dass $y \equiv uz^2$ in R/I und somit können wir y, samt der Gleichung, "wegschmeißen".

Da aber $R_x \simeq S_s$ isomorph sind, haben diese auch isomorphe Quotientenkörper und wir sind fertig.

□

Aufgabe 6. Sei K ein Körper. Beweise, dass $K[X]$ ein Faktorring ist. *Man darf benutzen, dass* $K[X]$ *ein Hauptidealring ist.*

Beweis. Wir beweisen einfach die Aussage, dass Hauptidealbereich ⇒ Faktorring. (Der Grund, warum wir es nicht so formuliert haben ist, dass andere Beweise, welche nur in diesem speziellen Fall funktionieren auch erlaubt sein sollen.)

Als erstes wollen wir beweise, dass es eine Zerlegung in irreduziblen Faktoren existiert. In $K[X]$ ist dies klar. Im Allgemeinen kann man dies aber wie folgt argumentieren: Sei $f = f_0 \in R$. Wenn f irreduzibel ist sind wir fertig. Andernfalls gibt es ein d_1 welches f teilt, so dass d_1 und $f_1 = f/d_1$ keine Einheiten sind. Wenn f_1 irreduzibel ist sind wir fertig. Andernfalls kann man ein d_2 finden, so dass ….

Wir erhalten somit echte Inklusionen $(f_0) \subsetneq (f_1) \subsetneq (f_2) \cdots$. Da die Vereinigung dieser Ideale wieder ein Ideal I ist (Kette von Inklusionen), muss auch $I = (h)$ ein Hauptideal sein. Da aber $h \in I = \bigcup(f_i)$, muss $h \in (f_N)$ für irgendein $N \geq 1$ sein. Es folgt, dass $(f_N) = (f_{N+k})$ für alle $k \geq 0$. Somit muss f_N irreduzibel sein.

Die Eindeutigkeit beweisen wir wie folgt: Zuerst merken wir, dass für f irreduzibel, $(f) \subseteq R$ ein Maximalideal ist. Dies ist klar, da aus $(f) \subseteq (g)$ folgt $f = gh$ für irgend ein $h \in R$. Da f aber irreduzibel ist, muss $g \in R^*$ oder $h \in R^*$ und somit muss $g = (1)$ oder $(g) = (f)$ gelten. Es folgt, dass $R/(f)$ ein Körper ist.

Sein $f_1 \cdots f_n = g_1 \cdots g_m$ zwei Zerlegungen in irreduziblen Elementen. O. B. d. A. sei (f_1) minimal unter den Idealen (f_i)'s und (g_j)'s. (Die Ordnung ist die Inklusionsordnung. Minimal bedeutet nicht "kleinstes", nur, dass es selber in keinem streng enthalten ist.) Betrachte nun

$$f_1 \cdots f_n = g_1 \cdots g_m \mod f_1.$$

Da die Linke Seite Null wird, muss auch die rechte Seite Null sein, denn $R/(f_1)$ ist ein Körper (wie oben argumentiert). Es folgt, dass es ein $1 \leq g \leq m$ gibt, so dass $(g_j) \subseteq (f_1)$ und bei Annahme auf f_1 muss also $(g_j) = (f_1)$ gelten.

Induktion impliziert nun die Aussage.

https://crypto.stanford.edu/pbc/notes/numberfield/edpidufd.html □