Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 1

Unverständnisse, Fragen oder Fehler, bitte an
ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de.

Abgabe + Tutorium ist Montag (24/04) um 17:00.
Es sollten 10 Punkte bearbeitet werden, die Aufgaben können aber nach belieben gewählt werden.

1 Aufgaben

Falls nicht anders erwähnt, sei K algebraisch abgeschlossen und $\mathsf{Char}(K) \neq 2$. - Zur Erinnerung, K ist von Charakteristik n, falls $na = 0$ für alle $a \in K$.

Aufgabe 1 (3=0.5+0.5+0.5+1.5 Punkte). Bestimme, welche der folgenden Polynome irreduzibel sind:

i) $y - x^2$,

ii) $xy - 1$,

iii) $x^2 + y^2$,

iv) $x^2 + cxy + y^2 - 1$, $(c \in K)$.

Lösung. Bei all diesen Beispielen kann man wie folgt vorangehen: Angenommen, $P = fg$, wobei P das gegebene Polynom ist und $f, g \in K[x, y]$. Es ist klar, dass jeder Term der in f, bzw. g vorkommt, maximal x, wie auch y mit Potenz kleiner gleich 2 sein kann. (In den ersten zwei sind die Potenze noch mehr beschränkt). Nun schreibt man diese auf und multipliziert sie. Man merkt schnell, ob etwas zerlägbar ist oder nicht. Spiezifisch:

i) $y - x^2 = P = fg$ mit $f = a_f + b_f x + c_f x^2 + d_f y + e_f xy + h_f x^2 y$ und $g = a_g + b_g x + c_g x^2 + d_g y + e_g xy + h_g x^2 y$. Wir kennen aber die Koeffizienten von P. Wir können direkt sagen, $a_f a_g = 0$. O. B. d. A. können wir sagen $a_g = 0$. ETC...

   Da aber in P die meisten Koeffiziente Null sind, folgt dass alle Produkte der Koeffizienten außer den follgenden gleich Null sein müssen:

$$a_f c_g + b_f$$

iv) Hier muss man etwas überlegen: WRITE THE GENERAL PRODUCT OF DEG2 F AND DEG2 G and then argue...

□

Aufgabe 2 (1 Punkt). Bestimme die Anzahl der Schnittpunkte des Kreises $\mathrm{V}(x^2 + y^2 - 1)$ mit der Geraden $\mathrm{V}(y - cx - d)$, $c, d \in K$.

Lösung. Die Gerade $y - cx - d$ kann jede Gerade sein, außer den Horizontalen: Sprich, es kann nicht $x - a$ sein, für irgendeinen $a \in K$. Alle anderen Geraden jedoch können erhalten werden.

Man betrachte $x^2 + (cx + d)^2 - 1 = (1 + c^2)x^2 + cdx + (d^2 - 1) = 0$, was man nach Einsetzen von $y = cx + d$ in der Kreisgleichung erhält. Es ist eine quadratische Gleichung mit Lösungen $x = STUFF$. Für die gegebenen x-e, ist $y = ...$ Es folgt, dass die Gerade das Kreis schneidet, wenn c und d zwischen den Wertden... liegt. In diesen Fällen schneiden diese sich je zwei mal, es sei den, die Determinante ist gleich Null. In diesen Fällen schneiden sie sich je einmal. □

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sei $X \subseteq \mathbb{A}^2$ eine endliche Menge. Beweise, dass X algebraisch ist.

Lösung. Sei $x \in X$ ein Punkt. Es ist von der Form $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n$. Es folgt, dass x die Nullstelle all der Polynome $F_i = x_1 - a_i$ ist. (Deren zugehörigen Geometrischen Bilder werden Hyperflächen gennant). Es ist auch dirket ersichtlich, dass x die einzige Nullstelle von all diesen Polynomen F_i, $1 \leq i \leq n$ ist.

Damit haben wir bewiesen, dass jeder Punkt $x \in X$ algebraisch ist. Bei Definition ist die endliche Vereinigung von algebraischen Mengen algebraisch und somit folgt die Aussage. □

Aufgabe 4 (2=1+1 Punkte). i) Beweise, dass $(x) = (x + x^2, x^2) \subseteq K[x, x_2, \ldots, x_n]$. (Wir habe $x_1 = x$ gewählt um die Notation einfacher zu halten.) In anderne Worten, zeige, dass dass die Ideale erzeugt mit $\{x_1\}$ und $\{x_1 + x_1^2, x_1^2\}$, gleich sind.

ii) Sei K ein Körper. Vereinfache das Ideal $(2x^3 - 2x^2 + x - 1, -4x^4 - 2x^2)$.

Lösung. i) Sei I ein Ideal. Aus $x \in I$ folgt $x^2 \in I$ und somit $x + x^2 \in I$. Damit folgt $(x) \subseteq (x + x^2, x^2)$. Umgkehrt folgt aus $x + x^2 \in I$, $x^2 \in I$, dass $x + x^2 - x^2 = x \in I$ und daher $(x + x^2, x^2) \subseteq (x)$ und wir sind fertig.

ii) Es gilt

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2x^2 + x - 1 &= x(2x^2 + 1) - (2x^2 + 1) \\ &= (x - 1)(2x^2 + 1) \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist $-4x^4 - 2x^2 = -2x^2(2x^2 + 1)$. In andern Worten, unser Ideal kann wie folgt umgeschrieben werden:

$$I = ((x - 1)(2x^2 + 1), 2x^2(2x^2 + 1))$$

Es folgt, dass auch

$$2x \cdot (x - 1)(2x^2 + 1) - 2x^2(2x^2 + 1)) = -2x(2x^2 + 1) \in I.$$

Da wir über einen Körper sind, muss auch

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2)x(2x^2 + 1) = x(2x^2 + 1) \in I$$

sein. Da $(x - 1)(2x^2 + 1) \in I$ und $x(2x^2 + 1) \in I$, ist auch $2x^2 + 1$ in I. Es folgt, dass $I = (2x^2 + 1)$, da beide Erzeuger vielfache davon sind. □

Aufgabe 5 (4=1+2+1 Punkte). Sein $I, J \subseteq R$ Ideale. Beweise, dass

i) $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$,

ii) $\sqrt{I}\sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$. Bringe ein Gegenbeispiel, dass die Gleichung nicht hält.

iii) Gilt $\sqrt{I} + \sqrt{J} = \sqrt{I + J}$?

Lösung. i) Sei $a \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. In anderen Worten, es gibt $n, m \geq 0$, so dass $a^n \in I$ und $a^m \in J$. O. B. d. A. ist $n \geq m$ und somit gilt $a^n \in I$ und $a^n \in J$, sprich $a^n \in I \cap J$. Dies widerum bedeutet genau, dass $a \in \sqrt{I \cap J}$. Die andere Seite ist trivial.

ii) Sei $a \in \sqrt{I}\sqrt{J}$. In anderen Worten, es gibt $x, y \in R$ und $n, m \geq 0$, so dass $x^n \in I$, $y^m \in J$ und $a = x^n y^m$. Als solches gibt es ein $k \geq 1$ ($k = 1$), so dass $a^k = rs$, mit $r \in I$, $s \in J$. Hier sind $r = x^n$, $s = y^m$.

Als Gegenbeispiel, sein $R = K[X]$, $I = (x) = J$. Dann gilt $\sqrt{(x)} = (x)$ (warum?), $\sqrt{(x)}\sqrt{(x)} = (x)(x) = (x^2)$, aber $IJ = (x)(x) = (x^2)$ und somit ist $\sqrt{IJ} = (x) \neq (x^2)$.

iii) ... ?? □

Aufgabe 6 (2=1+1 Punkte). Man erinnere sich, dass $K[x_1, \ldots, x_n]$ ein faktorieller Ring ist, daher wir eine eindeutige Zerlegung in irreduzible Faktoren haben.

i) Sein $T, S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ Teilmengen von Polynomen. Beweise, dass

$$\mathrm{V}(T) = \mathrm{V}(S) \quad \text{genau dann wenn} \quad \sqrt{(T)} = \sqrt{(S)}.$$

ii) Sein $f, g \in K[x, y]$ irreduzible Polynome mit $\mathrm{V}(f) = \mathrm{V}(g)$. Beweise, dass es ein $0 \neq c \in K$ gibt, mit $f = cg$.

Aufgabe 7 (*). Vereinfache $I = (x^2 + 7xy^2, 3x^3 - 2y, 4y^2 - x^2)$ über einen algebraisch abgeschlossenen Körper:

–