Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 9

Unverständnisse, Fragen oder Fehler, bitte an
ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de.

Abgabefirst ist bis einschlieslich Montag (20/06) um 10:00. Viel Glück und viel Erfolg.

Aufgaben

Aufgabe 1. i) Beweise, dass die Abbildung $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ gegeben durch

$$f([x_1 : x_2]) = [x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2]$$

wohldefiniert ist.

ii) Beweise, dass das Bild von f eine Teilmenge von $V = V(x_2^2 - x_1x_3)$ ist und dass wir eine Bijektion

$$\mathbb{P}^1 \to V$$

haben.

iii) Sein $U_i^n \subset \mathbb{P}^n$, $i = 1, \cdots, n+1$ wie in der Vorlesung (das "hoch n" besagt nur, dass es in $\mathbb{P}^n$ liegt):

$$U_i^n = \{[x_1 : \cdots : x_{n+1}] \mid x_i \neq 0\}$$

Welche Punkte von $\mathbb{P}^2$ liegen nicht auf je zwei der drei Mengen U_1^2, U_2^2, U_3^2?

iv) Beweise, dass $f^{-1}(U_1^2) = U_1^1$ und $f^{-1}(U_3^2) = U_2^1$. Was is $f^{-1}(U_2^2)$?

v) Sei $\epsilon_i^n : \mathbb{A}^n \to U_i^n$ die kanonische Bijektion

$$\epsilon_i(a_1, \cdots, a_n) = (a_1, \cdots, a_{i-1}, 1, a_i, \cdots, a_n).$$

Beweise, dass $\epsilon^{-1}(U_i^2 \cap V)$ eine algebraische Untervarietät von $\mathbb{A}^2$ ist, indem man die definierenden Gleichungen dieser Mengen explizit gibt.

vi) Berechne die Kompositionen

$$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{\epsilon_1} U_1^1 \xrightarrow{f} U_1^2 \xrightarrow{\epsilon_1^{-1}} \mathbb{A}^2$$

und

$$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{\epsilon_2} U_2^1 \xrightarrow{f} U_3^2 \xrightarrow{\epsilon_3^{-1}} \mathbb{A}^2.$$

Sind diese Morphismen von algebraischen Varietäten?

vii) Was passiert, wenn wir die gleiche Frage für

$$f^{-1} : V(x_2^2 - x_1x_3) \to \mathbb{P}^1$$

stellen? In anderen Worten sind die Kompositionen

$$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{\epsilon_1} U_1^1 \xrightarrow{f^{-1}} U_1^2 \xrightarrow{\epsilon_1^{-1}} \mathbb{A}^2$$

und

$$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{\epsilon_2} U_2^1 \xrightarrow{f^{-1}} U_3^2 \xrightarrow{\epsilon_3^{-1}} \mathbb{A}^2$$

Morphismen von algebraischen Varietäten?

Aufgabe 2 (3 Punkte). Eine Gerade in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ ist die Menge aller Punkte $[x_1 : x_2 : x_3]$, so dass

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

wobei a_1, a_2, a_3 fixiert sind und mindestens eines der a_i's ungleich Null ist.

i) Finde eine Gerade welches durch den Punkten $(1 : i : 0)$ und $(1 : -i : 0)$ geht.

ii) Beweise, dass es genau eine Gerade gibt, welches auf zwei verschiedenen projektiven Punkten liegt. (Also, dass zwei Punkte eine eindeutige Gerade definieren).

iii) Beweise, dass jede zwei Geraden sich genau einmal in $\mathbb{P}^2$ schneiden.