Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 7

Fragen oder Fehler, bitte an ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de. Kommentare können auch im Online-Notepad https://zumpad.zum.de/una-MTH-2550-7930-23 hinterlassen werden.
Tutorium ist Donnerstags um 17:30

Sei durchgehend A ein diskreter Bewertungsring, $g \in A$ irreduzibel mit $\mathfrak{m} = (g)$ dessen Maximalideal und $\nu : A \to \mathbb{Z}$ die Auswertungsabbildung $(ug^n \mapsto n)$.

Aufgabe 1 (2 Punkte). Sei $K = \mathsf{Q}(A)$ das Quotientenkörper von A. Beweise, dass für jeden $0 \neq x \in K$, wir $x \in A$ oder $x^{-1} \in A$ haben.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Beweise, dass

- $x \in A$ genau dann eine Einheit ist wenn $\nu(x) = 0$,
- $x \in A$ genau dann irreduzibel ist wenn $\nu(x) = 1$,
- $\mathfrak{m} = \{x \in A | \nu(x) \geq 1\}$ und
- $\mathfrak{m}^n = \{x \in A | \nu(x) \geq n\}$.

Definition 0.0.1. Sei R ein Ring und S ein R-Algebra. (In unserem Fall können wir $S = Q(R)$, das Quotientenkörper, annehmen). Ein Element $a \in S$ wird *ganz* über R genannt, wenn es ein monisches Polynom (Leitkoeffizient gleich 1) $0 \neq f(x) \in R[x]$ gibt, mit $f(a) = 0$.

Definition 0.0.2. Ein Integritätsbereich R heist *normal*, wenn aus $\alpha \in Q(R)$, mit α ganz über R, $\alpha \in R$ folgt.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Beweise, dass A normal ist.

Aufgabe 4. Sein R ein Körper und $f : A \to B$ K-linear. Für einen beliebigen Vektorraum X, sei

$$f_* : \mathsf{Hom}(X, A) \to \mathsf{Hom}(X, B)$$

die Abbildung, welches $t : X \to A$ nach $f \circ t : X \to B$ sendet.

(i) Beweise, dass $f_* : \mathsf{Hom}(X, A) \to \mathsf{Hom}(X, B)$ K=linear ist.

Man nehme nun an, dass

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

kurzexakt ist.

(ii) Beweise, dass

$$0 \to \mathsf{Hom}(X, A) \to \mathsf{Hom}(X, B) \to \mathsf{Hom}(X, C)$$

exakt ist.

(iii) Zeige, dass die induzierte Abbildung $\mathsf{Hom}(X, B) \to \mathsf{Hom}(X, C)$ surjektiv ist. In anderen Worten, dass

$$0 \to \mathsf{Hom}(X, A) \to \mathsf{Hom}(X, B) \to \mathsf{Hom}(X, C) \to 0$$

kurzexakt ist.

Aufgabe 5 (*). Sein $f : A \to B$, $g : B \to C$ K-linear und betrachte die Komposition $h = g \circ f$. Beweise, dass $\mathsf{Ker}(f) \subset \mathsf{Ker}(h)$ und dass f eine Abbildung von $\mathsf{Ker}(h)$ nach $\mathsf{Ker}(g)$ induziert. Beweise zudem, dass man eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathsf{Ker}(f) \to \mathsf{Ker}(h) \to \mathsf{Ker}(g) \to \mathsf{KoKer}(f) \to \mathsf{KoKer}(h) \to \mathsf{KoKer}(g) \to 0$$

hat. Hier bezeichnet KoKer den sogenannten *Kokern*, was für $\alpha : X \to Y$ als das Quotient $\mathsf{KoKer}(\alpha) \coloneqq Y/\alpha(X)$ definiert wird.

Aufgabe 6 (*). Sein

$$\cdots \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{f_0} C \to 0$$

und

$$0 \to C \xrightarrow{g_0} B_0 \xrightarrow{g_1} B_1 \xrightarrow{g_2} \cdots$$

exakt. Beweise, dass man das folgende exakte Sequenz erhalten kann:

$$\cdots \xrightarrow{f_2} A_1 \xrightarrow{f_1} A_0 \xrightarrow{g_0 \circ f_0} B_0 \xrightarrow{g_1} B_1 \xrightarrow{g_2} \cdots.$$