Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 5

Fragen oder Fehler, bitte an ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de. Kommentare können auch im Online-Notepad https://zumpad.zum.de/una-MTH-2550-7930-23 hinterlassen werden.
Die mündlichen Aufgaben werden Montag (03/06) um 17:30 Uhr besprochen.
Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist Montag (10/06) um 17:30 Uhr.

1 Mündlich

Aufgabe 1. Sei K algebraisch abgeschlossen und $f \in K[x,y]$ ein nicht-konstantes Polynom mit $f = f_1^{e_1} \dots f_r^{e_r}$, f_i irreduzibel und $e_i \geq 1$. Beweise, dass

$$V(f) = V(f_1) \cup \dots \cup V(f_r),$$

und die $V(f_i)$ irreduzibel sind, mit $I(V(f)) = (f_1 \dots f_r)$.

Aufgabe 2. Bestimme, ob die gegebene Kurve f regulär ist am Punk a und finde alle Tangenten.

i) $f = x(1 + x(1 + y))$, $a = (0,0)$

ii) $f = 4(x + 2y)^2 - y^5$, $a = (0,0)$

ii) $f = x^2 + y^2 - 1$, $a = (1,0)$.

2 Schriftlich

Aufgabe 3. Sei f irreduzibel in $K[x,y]$. Ohne anzunehmen das K algebraisch abgeschlossen ist, beweise, dass $V(f)$ topologisch irreduzibel ist wenn $V(f)$ unendlich viele Punkte hat. Zeige zudem, dass in diesem Fall

$$I(V(f)) = (f)$$

gilt.