Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 4

Fragen oder Fehler, bitte an ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de. Kommentare können auch im Online-Notepad https://zumpad.zum.de/una-MTH-2550-7930-23 hinterlassen werden.

Die mündlichen Aufgaben werden in der Nachholübung am Montag (22/05) um 17:30 Uhr besprochen. Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist Donnerstag (24/05) um 17:30 Uhr.

1 Mündlich

Aufgabe 1. Beweise Proposition 1.4.13. Mit anderen Worten, zeige, dass die Zuordnungen $(-)^*$ und $(-)^!$ Identitäten und Kompositionen respektieren. Folgere, dass Isomorphismen genau auf Isomorphismen abgebildet werden.

Aufgabe 2. Es sei $f \in K[x,y]$ und $V = V(f) \subseteq \mathbb{A}^2$. Untersuche, ob V isomorph zu einer Geraden (also zu $\mathbb{A}^1$) ist für die folgenden Werte von f:

i) $f = y - x^2$. *Hinweis: Zeige* $K[V] \simeq K[x]$.

ii) $f = y^2 - x^3$. *Hinweis: Bemerke, dass es einfacher ist Terme in Unterringen von freien Ringen zu faktorisieren, als in Quotientenringen von freien Ringen. Wie kann man* $K[\mathrm{V}]$ *als ein Unterring sehen? (Andere Lösungsansetze sind natürlich auch möglich)*

iii) $f = 1 - xy$. *Hinweis: Betrachte die Einheiten im Koordinatenring.*
Zusatz: Wie kann man $V(f)$ mit einer Geraden in Verbindung bringen?

Aufgabe 3. i) Sei $\mathrm{V} = \mathrm{V}(y - x^2, z - x^3)$. Beweise, dass $\mathrm{V} \simeq \mathbb{A}^1$ durch das Aufbauen von polynomialen Abbildungen.

ii) Finde $\mathrm{I}(\{(t^2, t^3) \mid t \in K\})$.

2 Schriftlich

Definition 2.0.1. Eine Teilmenge $T \subseteq X$ eines topologischen Raumes X wird *dicht* genannt, wenn der Abschluss $\overline{T}$ von T (kleinste abgeschlossene Menge welches T enthält) ganz X ist. Sprich $\overline{T} = X$.

Aufgabe 4. i) Beweise, dass ein topologischer Raum genau dann irreduzibel ist, wenn jede offene nichtleere Teilmenge dicht ist.

ii) Sein $f, g, h \in K[x,y]$ mit $h \neq 0$ und $f(a) = g(a)$ für jeden $a \in \mathbb{A}^2 \setminus \mathrm{V}(h)$. Daher für jeden a, so dass $h(a) \neq 0$. Beweise, dass $f = g$.

Aufgabe 5. Sein V und W irreduzibel und $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ eine polynomiale Abbildung und $a \in \mathrm{V}$ ein Punkt.

i) Beweise, dass $\mathfrak{m}_{\varphi(a)} = (\varphi^*)^{-1}(\mathfrak{m}_a)$. In Worten ausgedrückt, dass das Maximalideal assoziiert zum Punkt $\varphi(a) \in \mathrm{W}$ genau das Urbild des Maximalideals assoziiert zum Punkt $a \in \mathrm{V}$ ist.

ii) Zeige, dass es einen kanonischen K-Algebrahomomorphismus

$$\varphi_a^* : \mathcal{O}_{\varphi(a)}(\mathrm{W}) \to \mathcal{O}_a(\mathrm{V})$$

induziert.

Aufgabe 6. Sei V irreduzibel. Beweise, dass es einen Isomorphismus

$$\bigcap_{a \in \mathrm{V}} \mathcal{O}_a(\mathrm{V}) \simeq K[\mathrm{V}]$$

gibt. *Alternativ* zeige die vereinfachte Version: Dass es einen Isomorphismus

$$\bigcap_{a \in \mathbb{A}^2} \mathcal{O}_a \simeq K[x, y]$$

gibt.