Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 3

Unverständnisse, Fragen oder Fehler, bitte an
ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de

Die mündlichen Aufgaben werden Montag (08/05) besprochen. Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist Donnerstag (11/05) um 17:30. Viel Glück und viel Erfolg.

1 Mündlich

Aufgabe 1. Seien $I, J \subseteq R$ Ideale. Zeige folgende Aussagen und finde Gegenbeispiele für die umgekehrten Teilmengenbeziehungen.

i) $\sqrt{I}\sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$ und $\sqrt{\sqrt{I}\sqrt{J}} = \sqrt{IJ}$.

ii) $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I+J}$ und $\sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} = \sqrt{I+J}$.

iii) $IJ \subseteq I \cap J$ und $\sqrt{IJ} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$.

Aufgabe 2.

i) Formuliere die Definition einer irreduziblen Teilmenge mithilfe offener Mengen.

ii) Beweise, dass in der gewöhnlichen, von einer Norm induzierten Topologie auf $\mathbb{R}^n$, die irreduzible Mengen genau die Punkte sind.

Aufgabe 3. Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Varietät.

i) Beweise, dass $\overline{f} \in K[\mathrm{V}]$ genau dann eine Einheit ist, wenn $f(a) \neq 0$ jeden alle $a \in \mathrm{V}$.

ii) Sei R ein Ring und $a \in R$ ein nilpotentes Element, das heißt es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, mit $a^n = 0$. Beweise, dass $1 - a$ eine Einheit ist.

iii) Sei $\mathrm{V} = \mathrm{V}(J)$ für ein Ideal $J \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$. Für jedes $f \in \mathrm{I}(\mathrm{V})$ ist $1 + f$ eine Einheit in $K[x_1, \ldots, x_n]/J$.

iv) Bestimme alle Einheiten in $K[\mathrm{V}]$ von

   a) $\mathrm{V} = \mathrm{V}(y - x^2)$ und
   b) $\mathrm{V} = \mathrm{V}(xy - 1)$

   in $\mathbb{A}^2$.

2 Schriftlich

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $J = \sqrt{J}$ ein Radikalideal. Beweise:

i) Es ist J der Schnitt all jener Primideale, welche J enthalten.

ii) Ist K algebraisch abgeschlossen und $R = K[x_1, \ldots, x_n]$, so ist J der Durchschnitt all jener maximalen Ideale, welche J enthalten. (Hilberts Nullstellensatz und etwas "Geometrie" könnten hilfreich sein.)

Definition 2.0.1. Zur Erinnerung, ein Ring R heißt reduziert, wenn 0 das einzige nilpotente Element ist. Ein Element x heißt wiederum nilpotent, wenn es ein $n \geq 0$ gibt, so dass $x^n = 0$.

Aufgabe 5. Beweise, dass ein Ideal genau dann radikal ist, wenn der Koordinatenring der zugehörigen Varietät reduziert ist.

Aufgabe 6. Sei R ein Ring, $I \subseteq J \subseteq R$ Ideale und $\pi : R \to R/I$ die kanonische Projektion. Beweise folgende Aussagen:

(i) Das Bild $\pi(J)$ ist ein Ideal von R/I (hier braucht man $I \subseteq J$ nicht).

(ii) Sei J ein Radikalideal. Dann ist $\pi(J)$ ein Radikalideal.

(iii) Sei $J = \mathfrak{p}$ prim. Dann ist $\pi(\mathfrak{p})$ ein Primideal.

(iv) Sei $J' \subseteq R/I$ ein Ideal. Es gilt

  (a) $I \subseteq \pi^{-1}(J')$,

  (b) $\pi(\pi^{-1}(J')) = J'$ und

  (c) $\pi^{-1}(\pi(J)) = J$.

(v) Ist $I \subseteq J' \subseteq R$ ein weiteres Ideal, so gilt $J \subseteq J'$ genau dann, wenn $\pi(J) \subseteq \pi(J')$ in R/I. Überdies ist $J = J'$ genau dann, wenn $\pi(J) = \pi(J')$.

(vi) Sei $J = \mathfrak{m}$ ein Maximalideal. Dann ist $\pi(\mathfrak{m})$ ein Maximalideal.