Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 2

Unverständnisse, Fragen oder Fehler, bitte an
ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de

Die mündlichen Aufgaben werden Donnersag (04/05) besprochen. Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist Montag (08/05) um 17:30. (Oder vielleicht später, wenn die Übung verschoben wird.) Viel Glück und viel Erfolg.

1 Aufgaben

1.1 Mündlich

Aufgabe 1. Beweise, dass die Lokalisierung $S^{-1}R$ in natürlicher Weise die Struktur einer R-Algebra trägt, wobei die Multiplikation durch

$$(r_1, s_1) \cdot (r_2, s_2) \coloneqq (r_1 r_2, s_1 s_2)$$

und die Addition durch

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) \coloneqq (r_1 s_2 + r_2 s_1, s_1 s_2)$$

gegeben ist.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $f = gh \in R$ ein Element. Beweise, dass $R_f \simeq (R_g)_h$, wobei wir mit h das kanonische Element $\frac{h}{1} \in R_g$ meinen.

Aufgabe 3. Sei $S \subseteq R$ eine multiplikative Teilmenge und $\alpha : R \to T$ ein Ringhomomorphismus, so dass $\alpha(S) \subseteq T^*$ in den Einheiten landet. Beweise, dass es genau einen Ringhomomorphismus $\alpha_* : S^{-1}R \to T$ gibt, so dass $\alpha_* \circ \gamma = \alpha$, wobei $\gamma : R \to S^{-1}R$ die kanonische Abbildung ist.

1.2 Schriftlich

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $I \subseteq J \subseteq R$ Ideale von R. Beweise, dass $R/J \simeq (R/I)/(J/I)$.

Aufgabe 5. Sei $R = K[x, y, z]/(xy - z^2)$ und $S = K[s, t]$.

i) Beweise, dass R ein Integritätsbereich ist. (Man darf die Tatsache benutzen, dass ein Hauptideal (f) in $K[x_1, \ldots, x_n]$ genau dann prim ist, wenn f irreduzibel ist.)

ii) Da x, y, z irreduzibel in R sind, gilt $R \ncong S$. Seien $Q(R) = (R \setminus \{0\})^{-1}R$ und $Q(S) = (S \setminus \{0\})^{-1}S$ die Quotientenkörper von R und S. Ist $Q(R) \simeq Q(S)$?

Aufgabe 6. Sei K ein Körper. Beweise, dass $K[X]$ ein faktorieller Ring ist. *Hier darf man Annehmen, dass $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist.*