Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 12

Aufgabe 1. Sei $V(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ eine irreduzible Kurve mit $\mathsf{grad}(F) \geq 2$ und $p \in F$ ein regulärer Punkt. Beweise, dass $\mathfrak{I}(p, F \cap T_p) \geq 2$ genau dann, wenn T_p die Tangenten von F am Punkt p ist.

Aufgabe 2. Sei $F = x^2 + y^2 - z^2$ und $G = x + y + z$. Bestimme den Schnittdivisor

$$F \bullet G.$$

Aufgabe 3. Bestimme $\mathsf{div}(\varphi) \in \mathsf{Div}(F)$ und dessen Grad für $F = y^2z - x^3 + xz^2$ und

i) $\varphi = \frac{\overline{x}}{\overline{y}}$;

iii) $\varphi = \frac{\overline{y}}{\overline{z}}$.

In den nachfolgenden Aufgaben kann man annehmen, dass die Kurven glatt sind. Zur Erinnerung, für ein rationales Polynom $\varphi = \frac{G}{H}$ wird die Schnittzahl am Punkt a durch $\mathfrak{I}(a, \varphi \cap F) = \mathfrak{I}(a, G \cap F) - \mathfrak{I}(a, H \cap F)$ definiert.

Aufgabe 4. Sei F eine Kurve vom Grad 2 und $p, q \in F$ mit $p \neq q$. Beweise, dass es eine rationale Funktion $\varphi \in K(F)$ gibt, mit $\mathfrak{I}(p, \varphi \cap F) = 1$, $\mathfrak{I}(q, \varphi \cap F) = -1$ und $\mathfrak{I}(a, \varphi \cap F) = 0$ für jeden Punkt $a \in F$, wobei $a \neq p$ und $a \neq q$.

Schlussfolgere, dass $\mathsf{Pic}^0(F)$ trivial (Gruppe mit einem Element) ist. Was ist $\mathsf{Pic}(F)$?

Zu Kurven vom Grad 3 (eher nach der Vorlesung am 19.07 gedacht)

Aufgabe 5. Sei C irreduzibel mit $\mathsf{grad}(C) = 3$. Man nehme 3 kollineare Punkte (Punkte, die auf einer Gerade liegen) p_1, p_2, p_3 auf C. Zu jedem dieser Punkte, ziehe die Tangente T_i am Punkt p_i: Daher, eine Gerade, so dass der Schnittdivisor $T_i \bullet C = P_i + P_i + Q_i$, wobei P_i das Punktdivisor assoziiert zum Punkt p_i ist und Q_i das Punktdivisor assoziiert zum dritten Schnittpunkt q_i von C und T_i. (Dies kann natürlich wieder p_i selbst sein. Aber, laut Bezout wissen wir, dass C und T_i sich "drei mal" schneiden müssen).

Beweise, dass q_1, q_2, q_3 auf einer Gerade liegen.

Definition 0.0.1. Ein Punkt p auf einer Kurve C mit $\mathsf{grad}(C) = 3$ wird *Wendepunkt* genant, wenn $\mathfrak{I}(p, C \cap T_p) = 3$, wobei T_p die Tangente von C am Punkt p ist. Anderes gesagt, wenn der Schnittdivisor $T_p \bullet C = P + P + P$, wobei P das Punktdivisor von p ist.6

Aufgabe 6. Sein $p, q \in C$ Wendepunkte und L die Gerade, welches durch diese zwei Wendepunkte definiert wird (wenn $p = q$, sei die Gerade einfach die Tangente von C am Punkt $p = q$). Beweise, dass auch der dritte Schnittpunkt von L mit C ein Wendepunkt sein muss.

Beweis. Wir brauchen zuerst das folgende "Assoziativitätsgesetz": Für alle Punkte x, y, z, w gilt

$$x + (y + (z + w)) = w + (z + (z + x)).$$

Der Beweis hierzu ist quasi identisch zum Beweis, dass die Gruppenstruktur ($a \oplus b := (a + b) + o$, wobei o unser ausgewählter Punkt ist) assoziativ ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} p+p &= p && \text{da } p \text{ ein Wendepunkt ist.} \\ q+q &= q && \text{da } q \text{ ein Wendepunkt ist.} \\ p+q &= r && \text{da wir } r \text{ so gewählt haben.} \\ r+r &= s && \text{Es gilt zu zeigen, dass } s = r. \end{aligned}$$

Hierzu schreiben wir

$$s = r + r = r + (p + q) = r + (p + (q + q)),$$

was nun aufgrund des "Assoziativitätsgesetzes", uns

$$s = q + (p + (q + r)) = q + (p + p) = q + r = r$$

gibt. Hier haben wir noch die folgende Beobachtung benutzt: Wenn $x + y = z$, so gilt auch $x + z = y$ (geometrisch ist dies klar, da es sich um eine Gerade handelt). Formel kann man dies als $x + (x + y) = y$ ausdrücken. □

Bemerkung 0.0.2. Mit Drittem meinen wir nicht zwangsweise distinkt. Es kann auch gleich p, q sein. Nachdem wir elliptische Kurven kennengelernt haben, kann man noch schlussfolgern, dass die Wendepunkte eine Untergruppe der Gruppe aller Punkte auf einer elliptischen Kurve darstellen, sofern man als Basispunkt natürlich einen Wendepunkt wählt.