Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 11

Aufgabe 1. Sei $X \subseteq \mathbb{P}^2$ eine endliche Teilmenge. Zeige, dass es homogene Polynome $F, G \in K[x, y, z]$ gibt, mit $X = \mathrm{V}(F, G)$.

Aufgabe 2. Sei p eine Primzahl und $q := p^r$ für irgendein $r \geq 1$. Betrachte den Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen. Beweise folgende Aussagen:

i) Jede Gerade in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$ enthält genau $q + 1$ Punkte.

ii) Jede Ebene in in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$ hat genau $q^2 + q + 1$ Punkte und genauso viele Geraden.

Aufgabe 3. Sei $\mathrm{V}(F) \subseteq \mathbb{P}^2$ eine irreduzible Kurve mit $\mathsf{grad}(F) \geq 2$, $p \in F \cap \mathbb{A}^2$ ein regulärer Punkt und T_p eine Tangente von F am Punkt p, im projektiven Sinne. Beweise, dass $\mathfrak{I}(p, F_* \cap (T_p)_*) \geq 2$, wobei F_* und $(T_p)_*$ die Dehomogenisierungen sind.

Aufgabe 4. Seien $F = x^3 - y^2z + 17z^3$ und $G = x^2 - 4xz - yz + 9z^2$. Bestimme die Schnittzahl von F und G an jedem Punkt $p \in \mathbb{P}^2$.

Aufgabe 5. Beweise, dass die projektive Kurve

$$xy^4 + yz^4 + xz^4$$

irreduzibel ist und finde die Punkte mit Multiplizität ≥ 2.