Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Arbeitsblatt 10

Aufgabe 1. Beweise, dass eine projektive Varietät $\mathrm{V} \subseteq \mathbb{P}^n$ genau dann irreduzibel ist, wenn $\mathrm{I}(\mathrm{V})$ ein Primideal ist.

Aufgabe 2. Zeige, dass das Radikal eines homogenen Ideals wieder homogen ist.

Aufgabe 3. Sei $I \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal und $I^* \subseteq K[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ dessen Homogenisierung. Beweise folgendes:

i) Aus I radikal folgt I^* radikal;

ii) Aus I prim folgt I^* prim.

Aufgabe 4. Sei I ein homogenes Ideal und $K_h[\mathrm{V}] = K[x_1, \ldots, x_n]/I$. Für eine Form $F \in K_h[\mathrm{V}]$, definiere $\mathsf{grad}(F) = \mathsf{grad}(\hat{F})$ für eine beliebige Hochhebung $\hat{f} \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Beweise, dass dies Wohldefiniert ist.

Aufgabe 5. Sei $f \in K_h[\mathrm{V}]$. Zeige, dass es Formen $F_0, \ldots, F_m \in K_h[\mathrm{V}]$ mit $\mathsf{grad}(F_i) = i$ gibt, so dass

$$f = F_0 + \cdots + F_m.$$

Beweise, das diese Darstellung eindeutig ist.