Elementare algebraische Geometrie: [MTH-2550]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 1

Unverständnisse, Fragen oder Fehler, bitte an
ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de.

Abgabe + Tutorium ist Montag (24/04) um 17:30.

1 Aufgaben

Falls nicht anders erwähnt, sei K algebraisch abgeschlossen und $\mathsf{Char}(K) \neq 2$. Zur Erinnerung, die Charakteristik von K ist wie folgt definiert: Es existiert ein eindeutiger Ringhomorphismus $\mathbb{Z} \to K$, gegeben durch $n \mapsto n \cdot 1$. Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealbereich ist, besitzt der Kern dieses Homomorphismus einen eindeutigen nichtnegativen Erzeuger, welcher die *Charakteristik* des Körpers genannt wird.

Aufgabe 1. Sei $X \subseteq \mathbb{A}^2$ eine endliche Menge. Beweise, dass X algebraisch ist.

Aufgabe 2. i) Beweise, dass $(x) = (x + x^2, x^2) \subseteq K[x, x_2 \ldots, x_n]$. Also, dass die von $\{x\}$ und $\{x + x^2, x^2\}$ erzeugten Ideale gleich sind.

ii) Vereinfache das Ideal $(2x^3 - 2x^2 + x - 1, -4x^4 - 2x^2)$.

Aufgabe 3. Bestimme, welche der folgenden Polynome irreduzibel sind. (*Man erinnere sich, dass* $K[X, Y] = K[X][Y]$.)

i) $y - x^2$,

ii) $xy - 1$,

iii) $x^2 + y^2$,

iv)* $x^2 + cxy + y^2 - 1$, $(c \in K)$.

Aufgabe 4. Bestimme die Anzahl der Schnittpunkte des Kreises $\mathrm{V}(x^2 + y^2 - 1)$ mit der Geraden $\mathrm{V}(y - cx - d)$, $c, d \in K$.