Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 9

Aufgaben 9

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$ und betrachte $\mathfrak{o}_K$. Es gilt

$$10 = 2 \cdot 5 = (2 + \sqrt{-6})(2 - \sqrt{-6}).$$

i) (1 Teilpunkt) Zeige, dass es in $\mathfrak{o}_K$ keinen Element der Norm 2 oder 5 gibt und schlussfolgere, dass es zwei echt verschiedene Faktorisierungen von $10 \in \mathfrak{o}_K$ in irreduziblen Elemente gibt.

ii) (2 Teilpunkte) Beweise, dass $\mathfrak{a} = (2, \sqrt{-6})$ ein Maximalideal von $\mathfrak{o}_K$ ist. Ferner, zeige, dass $\mathfrak{a}$ kein Hauptideal ist.

iii) (1 Teilpunkt) Zeige, dass $\mathfrak{a}^2 = (2)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ und $\mathfrak{o}_K$ dessen assoziiertes Zahlenring.

i) (1 Teilpunkt) Zeige, dass $2\mathfrak{o}_K = \mathfrak{p}_2^2$, wobei

$$\mathfrak{p}_2 = (2, 1 + \sqrt{-5}).$$

Bestimme die Norm von $\mathfrak{p}_2$.

ii) (1 Teilpunk) Zeige, dass $3\mathfrak{o}_K = \mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3$, wobei

$$\mathfrak{p}_3 = (3, 1 + \sqrt{-5})$$

und

$$\mathfrak{q}_3 = (3, 1 - \sqrt{-5}).$$

iii) (1 Teilpunkt) Zeige, dass $5\mathfrak{o}_K = \mathfrak{p}_5^2$, wobei

$$\mathfrak{p}_5 = (\sqrt{-5}).$$

iv) (1 Teilpunkt) Zeige, dass $7\mathfrak{o}_K = \mathfrak{p}_7\mathfrak{q}_7$, wobei

$$\mathfrak{p}_7 = (7, 3 + \sqrt{-5})$$

und

$$\mathfrak{q}_7 = (7, 3 - \sqrt{-5}).$$

v) (2 Teilpunkte) Betrachte die Ideale $\mathfrak{p}_3$ und $\mathfrak{q}_3$. Zeige, dass jedes Element $a + b\sqrt{-5} \in \mathfrak{q}_3$ die Eigenschaft hat, dass $a + b$ durch 3 teilbar ist, also $3 \mid a + b$ gilt.

Gleichwie, dass jedes Element $c + d\sqrt{-5} \in \mathfrak{p}_3$ die Eigenschaft hat, dass $c - d$ ein Vielfaches von 3 ist.

vi) Zeige, dass $\mathfrak{p}_3$ und $\mathfrak{q}_3$ keine Hauptideale sind.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

i) (1 Teilpunkt) Sei $d \equiv 2 \mod 4$. Zeige, dass

$$2\mathfrak{o}_K = \left(2, \sqrt{d}\right)^2$$

und das $\mathfrak{p} = \left(2, \sqrt{d}\right)$ ein Maximalideal ist.

ii) (1 Teilpunkt) Sei $d \equiv 3 \mod 4$. Zeige, dass

$$2\mathfrak{o}_K = \left(2, 1 + \sqrt{d}\right)^2$$

und das $\mathfrak{p} = \left(2, 1 + \sqrt{d}\right)$ ein Maximalideal ist.

iii) (2 Teilpunkte) Sei $d \equiv 1 \mod 8$. Zeige, dass

$$2\mathfrak{o}_K = \mathfrak{p}\mathfrak{q},$$

wobei $\mathfrak{p} = \left(2, \frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)$ und $\mathfrak{q} = \left(2, \frac{1-\sqrt{d}}{2}\right)$. Des weiteren, zeige, dass $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ unterschiedliche Maximalideale sind.

iv) (2 Teilpunkte) Sei $d \equiv 5 \mod 8$. Zeige, dass $2\mathfrak{o}_K$ ein Maximalideal ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte). Sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Dann ist $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ mit Ganzheitsbasis $\{1, \alpha, \alpha^2\}$. Wir definieren $\mathfrak{p} = (5, 2 + \alpha)$ und $\mathfrak{q} = (5, 4 + 3\alpha + \alpha^2)$.

i) (2 Teilpunkte) Beweise, dass das Polynom x^2+3x+4 irreduzibel ist über $\mathbb{F}_5$ und schlussfolgere, dass $\mathfrak{q}$ ein Maximalideal von $\mathfrak{o}_K$ ist. Man darf annehmen, dass irreduzible Elemente von $\mathbb{F}_5[X]$ zu Maximalideale korrespondieren. (*Tipp: Was kann man über den Kern einer surjektiven Abbildung in einem Körper sagen?*)

ii) (2 Teilpunkte) Zeige, dass es einen wohldefinierten Ringhomomorphismus

$$\mathfrak{o}_K \to \mathbb{F}_5$$

gibt, mit $f(\alpha) = 3 \in \mathbb{F}_5$. Schlussfolgere, dass $\mathsf{Ker}(f) = \mathfrak{p}$ ein Maximalideal von $\mathfrak{o}_K$ ist.

iii) (1 Teilpunkt) Bestätige, dass

$$1 = 5 + 2(\alpha + 1)(\alpha + 2) - 2(\alpha^2 + 3\alpha + 4)$$

und basierend darauf, beweise, dass

$$5\mathfrak{o}_K = \mathfrak{p}\mathfrak{q}.$$