Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 8

Aufgaben 8

Aufgabe 1 (4=2+2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$. Finde direkt (ohne Verwendung von Satz 2.4.15,), eine Ganzheitsbasis von $\mathfrak{o}_K$ und $\mathfrak{o}_L$. Bestimme die Diskriminante dieser Basis.

Aufgabe 2 (2 Punkt). Sei $K = \mathbb{Q}(w)$, mit $\mathfrak{m}_w = x^2 + x + 1$. Beschreibe $\mathfrak{o}_K$ und finde eine Ganzheitsbasis von K. Bestimme die Diskriminante dieser Basis.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $f(x) = x^3 + ax + b$ ein irreduzibles, normiertes kubisches Polynom und α eine Nullstelle.

i) (1 Teilpunkt) Was ist die Diskriminante von $\{1, \alpha, \alpha^2\}$?

ii) (2 Teilpunkte, je $0,5$ Punkte) Bestimme folgende Normen:

1. α
2. $\alpha - 3$
3. $1 + 2\alpha^2$
4. $1 - 2\alpha + 3\alpha^2$.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{10})$.

i) (1 Teilpunkt) Beweise, dass
$$\{1, \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{100}\}$$
keine Ganzheitsbasis ist.

ii) (1 Teilpunkt) Gib einen Kandidaten für eine Ganzheitsbasis von $\mathfrak{o}_K$ und beschreibe wie man es auf Ganzheit überprüfen würde.

Aufgabe 5 (2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ und
$$\mathcal{B} = \{1, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[4]{8}\}.$$

i) (1 Teilpunkt) Bestimme die Diskriminante von $\mathcal{B}$.

ii) (1 Teilpunkt) Beschreibe die Elemente, die man auf Ganzheit überprüfen, um zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine Ganzheitsbasis ist?

Man darf für die folgende Aufgabe annehmen, dass ein Element $\alpha \in \mathfrak{o}_K$ genau dann invertierbar ist, wenn $\mathsf{N}(\alpha) = \pm 1$.

Aufgabe 6 (3 Punkte). Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei und von $0, 1$ verschieden. Ein Körper der Form $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ heißt reell-quadratisch wenn $d > 0$ und imaginär-quadratisch wenn $d < 0$.

i) (2 Teilpunkte) Beweise, dass die Einheiten $\mathfrak{o}_K^*$ von $\mathfrak{o}_K$ im imaginär-quadratischen Fall wie folgt sind:

$$\mathfrak{o}_K^* = \begin{cases} \{\pm 1, \pm i\}, & d = -1 \\ \{\pm 1, \pm \zeta_3, \pm \zeta_3^2\}, & d = -3 \\ \{\pm 1\} & \text{Ansonsten} \end{cases}$$

ii) (1=0.5+0.5 Teilpunkt) Sei $d = 2$.

ii a) Zeige, dass $a = 3 - 2\sqrt{2}$ eine Einheit ist in $\mathfrak{o}_K$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

ii b) Beweise, dass die Einheiten $\mathfrak{o}_K^*$ eine unendliche Menge bilden.