Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 8

1 Aufgaben

Aufgabe 1 (4=2+2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{7})$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt{17})$. Finde direkt (ohne Verwendung von Satz 2.4.15,), eine Ganzheitsbasis von $\mathfrak{o}_K$ und $\mathfrak{o}_L$. Bestimme die Diskriminante dieser Basis.

Lösung. i) Wir fangen mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, \sqrt{7}\}$ an und überprüfen, ob es eine Ganzheitsbasis ist.

Es gilt

$$\Delta(\mathcal{B}) = \det \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{7} \\ 1 & -\sqrt{7} \end{pmatrix}^2 = (-2\sqrt{7})^2 = 4 \cdot 7.$$

Daher ist $N = 2$ eine ganze Zahl, dessen Quadrat $\Delta(\mathcal{B})$ teilt. Wir untersuchen die Elemente

$$\nu_1 = \frac{1}{2}, \quad \nu_2 = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{und} \quad \nu_3 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

auf Ganzalgebraität. Dafür sehen wir uns erst die Norm an, denn wenn die Norm keine ganze Zahl ist, so ist das Element auch nicht ganzalgebraisch. Wir haben

$$\mathsf{N}(\nu_1) = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{N}(\nu_2) = \frac{-7}{4} \quad \text{und} \quad \nu_3 = \frac{1-7}{4} = \frac{-3}{2}.$$

Da keines von denen eine ganze Zahl ist, kann keines der ν_i's Ganzalgebraisch sein, daher ist $\mathcal{B}$ eine Ganzheitsbasis mit Diskriminante $2^2 \cdot 7$.

ii) Wir gehen wie im vorigen Teil voran:

$$\Delta(\mathcal{B}) = \det \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{17} \\ 1 & -\sqrt{17} \end{pmatrix}^2 = (-2\sqrt{17})^2 = 2^2 \cdot 17.$$

Daher betrachten wir die Elemente

$$\nu_1 = \frac{1}{2}, \quad \nu_2 = \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{und} \quad \nu_3 = \frac{1+\sqrt{17}}{2},$$

deren Norm

$$\mathsf{N}(\nu_1) = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{N}(\nu_2) = \frac{-17}{4} \quad \text{und} \quad \nu_3 = \frac{1-17}{4} = -4$$

sind. Wir untersuchen also ν_3 weiter auf Ganzalgebraität: Es gilt

$$2\nu_3 - 1 = \sqrt{17}$$

woraus

$$4\nu_3^2 - 4\nu_3 + 1 - 17 = 0$$

folgt. Daher ist

$$\mathfrak{m}_{\nu_3} = x^2 - x - 4$$

das Minimalpolynom von ν_3, woraus dessen Ganzalgebraität folgt. Wir definieren eine neue Basis

$$\mathcal{C} = \{1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\}$$

wessen Diskriminante

$$\Delta(\mathcal{C}) = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ 1 & \frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}^2 = (\frac{1-\sqrt{17}}{2} - \frac{1+\sqrt{17}}{2})^2 = (-\sqrt{17})^2 = 17$$

ist. Da es keine ganze Zahl $N \geq 2$ gibt, dessen Quadrat 17 teilt, ist $\mathcal{C}$ eine Ganzheitsbasis mit Diskriminante 17. □

Aufgabe 2 (1 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(w)$, mit $\mathfrak{m}_w = x^2+x+1$. Beschreibe $\mathfrak{o}_K$ und finde eine Ganzheitsbasis von K. Bestimme die Diskriminante dieser Basis.

Lösung. Die Konjugierten von w sind

$$w_1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad w_2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

. Da diese bei Definition (da $\mathfrak{m}_w$ schon gegeben ist) Ganzalgebraisch sind, untersuchen wir $\mathcal{B} = \{1, w_1\}$ auf Ganzheit. Es gilt

$$\Delta(\mathcal{B}) = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ 1 & \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{pmatrix}^2 = (\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} - \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}) = \sqrt{-3}^2 = 3$$

Was zeigt, dass $\Delta(\mathcal{B})$ eine Ganzheitsbasis ist mit Diskriminante 17 und als solches ist

$$\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[w_1].$$

□

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $f(x) = x^3 + ax + b$ ein irreduzibles, normiertes kubisches Polynom und α eine Nullstelle.

i) (1 Teilpunkt) Was ist die Diskriminante von $\{1, \alpha, \alpha^2\}$?

ii) (2 Teilpunkte, je 0,5 Punkte) Bestimme folgende Normen:

1 α

2 $\alpha - 3$

3 $1 + 2\alpha^2$

4 $1 - 2\alpha + 3\alpha^2$.

Beweis. i) Es gilt $\Delta(\{1, \alpha, \alpha^2\}) = -27b^2 - 4a^3$.

ii)

1 $\mathsf{N}(\alpha) = -b$

2 $\mathsf{N}(\alpha - 3) = \mathsf{N}(-1)\mathsf{N}(3 - \alpha) = -(27 + 3a + b)$

3 $\mathsf{N}(1+2\alpha^2)\mathsf{N}(\alpha) = \mathsf{N}(\alpha+2\alpha^3) = \mathsf{N}\left(-2\left(a\alpha + b\right) + \alpha\right) = \mathsf{N}(-2b-(2a-1)\alpha) = \mathsf{N}(2a-1)\mathsf{N}(-\frac{2b}{2a-1} - \alpha) = (2a-1)^3 \cdot f(-\frac{2b}{2a-1}) = (2a-1)^3\left(\left(-\frac{2b}{2a-1}\right)^3 - \frac{2ab}{2a-1} + b\right) = (2a-1)^3\left(\frac{-8b^3-2ab(2a-1)^2+b(2a-1)^3}{(2a-1)^3}\right) = -8b^3 - 2ab(2a-1)^2 + b(2a-1)^3 = ...$

4 $\mathsf{N}(1-2\alpha+3\alpha^2)\mathsf{N}(2+3\alpha) = \mathsf{N}(2-4\alpha+6\alpha^2+3\alpha-6\alpha^2+9\alpha^3) = \mathsf{N}(2-4\alpha+6\alpha^2+3\alpha-6\alpha^2+9(-a\alpha-b)) = \mathsf{N}((2-9b)-(1+9a)\alpha)$. Die Anwendung der Formeln für $\mathsf{N}(r-\alpha)$ ergibt nun die Lösung.

□

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{10})$.

i) (1 Teilpunkt) Beweise, dass
$$\mathcal{B} = \{1, \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{100}\}$$
keine Ganzheitsbasis ist.

ii) (1 Teilpunkt) Gib einen Kandidaten für eine Ganzheitsbasis von $\mathfrak{o}_K$ und beschreibe wie man es auf Ganzheit überprüfen würde.

Beweis. i) Die Diskriminante von $\mathcal{B}$ ist
$$\Delta(\mathcal{B}) = -3^3 \cdot 10^2 = -3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2.$$

Als solches ist $\theta = \frac{1+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{100}}{3}$ eines der Elemente die wir auf Ganzalgebraität überprüfen müssen ($N = 3, a_0 = a_1 = a_2 = 1$). Sei $\alpha = \sqrt[3]{10}$. Dann gilt $\alpha^3 = 10$. Wir haben
$$\begin{aligned} 3\theta &= 1+\alpha+\alpha^2 \Leftrightarrow \\ 3\theta-1 &= \alpha(1+\alpha). \end{aligned}$$

Hoch 3 gerechnet ergibt es
$$\begin{aligned} & (3\theta-1)^3 = \alpha^3(1+\alpha)^3 \\ \Leftrightarrow\ & 27\theta^3-27\theta^2+9\theta-1 = 10(11+3\alpha+3\alpha^2) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{27\theta^3-27\theta^2+9\theta-1}{10} = (11+3\alpha+3\alpha^2) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{27\theta^3-27\theta^2+9\theta-111}{30} = \alpha(1+\alpha) \end{aligned}$$

Wenn wir die obige Gleichung einsetzen erhalten wir
$$\begin{aligned} & \frac{27\theta^3-27\theta^2+9\theta-111}{30} = 3\theta-1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{27\theta^3-27\theta^2+9\theta-111-90\theta+30}{30} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{27\theta^3-27\theta^2-81\theta-81}{30} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 27\theta^2(\theta-1)-81(\theta+1) = 0. \end{aligned}$$

Daher ist θ ganzalgebraisch.

ii) Die Ganzheitsbasis hier ist
$$\mathcal{C} = \{1\sqrt[3]{10}, \theta\}.$$

Die Diskriminante davon ist
$$\Delta(\mathcal{C}) = -3 \cdot 2^2 \cdot 5^2.$$

Man würde es auf Ganzalgebraität überprüfen, indem man Elemente der Form
$$\{\frac{a_0+a_1\sqrt[3]{10}+a_2\theta}{2} \quad 0 \le a_i \le 1\}$$

und
$$\{\frac{a_0+a_1\sqrt[3]{10}+a_2\theta}{5} \quad 0 \le a_i \le 4\}$$

überprüft. □

Aufgabe 5 (2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ und

$$\mathcal{B} = \{1, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[4]{8}\}.$$

i) (1 Teilpunkt) Bestimme die Diskriminante von $\mathcal{B}$.

ii) (1 Teilpunkt) Welche Elemente muss man auf Ganzheit überprüfen, um zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine Ganzheitsbasis ist?

Beweis. i) Das Minimalpolynom ist $\mathfrak{m}_{\sqrt[4]{2}} = x^4 - 2$, mit Ableitung $\mathfrak{m}'_\alpha = 4x^3$. Des weiteren gilt $\mathsf{N}(\alpha) = (-1)^4 \cdot 2 = 2$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathcal{B}) &= (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} \mathsf{N}(\mathfrak{m}'(\alpha)) \\
&= (-1)^{\frac{4(3)}{2}} \mathsf{N}(4\alpha^3)) \\
&= (-1)^6 \mathsf{N}(4)\mathsf{N}(\alpha)^3 \\
&= 4^4 \cdot 2^3 \\
&= 2^{11}.
\end{aligned}$$

ii) Die Elemente die hier Überprüft werden müssen sind von der Form

$$\left\{ \frac{a_0 + a_1 \sqrt[4]{2} + a_2 a_1 \sqrt[4]{3} + a_3 a_1 \sqrt[4]{8}}{2} \right\}, \quad 0 \le a_0, a_1, a_2, a_3 \le 1.$$

□

Aufgabe 6 (3 Punkte). Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei und von $0, 1$ verschieden. Ein Körper der Form $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ heißt reell-quadratisch wenn $d > 0$ und imaginär-quadratisch wenn $d < 0$.

i) (2 Teilpunkte) Beweise, dass die Einheiten $\mathfrak{o}_K^*$ von $\mathfrak{o}_K$ im imaginär-quadratischen Fall wie folgt sind:

$$\mathfrak{o}_K^* = \begin{cases} \{\pm 1, \pm i\}, & d = -1 \\ \{\pm 1, \pm \zeta_3, \pm \zeta_3^2\}, & d = -3 \\ \{\pm 1\} & \text{Ansonsten} \end{cases}$$

ii) (1 Teilpunkte) Sei $d = 2$.

ii a) Zeige, dass $a = 3 - 2\sqrt{2}$ eine Einheit ist in $\mathfrak{o}_K$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

ii b) Beweise, dass die Einheiten $\mathfrak{o}_K^*$ eine unendliche Menge bilden.

Lösung. i) Ein Element ist genau dann invertierbar, wenn dessen Norm ± 1 ist. Sei $x = a + b\sqrt{d}$ ein allgemeines Element. Dann ist

$$N(x) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2, \ a, b \in \mathbb{Q}.$$

Wir wollen nun bestimmen, wann $x \in \mathfrak{o}_K$. Dafür gibt es bekanntlich 2 Fälle zu untersuchen, $d = 1 \mod 4$ und $d \neq 1 \mod 4$. Der zweite Fall ist klar. Im ersten Fall, besteht ein beliebiges Element as $u + v\frac{1+\sqrt{d}}{2}, u, v \in \mathbb{Z}$, also $a = u + \frac{1}{2}v$, $b = \frac{1}{2}v$. Daher sind $A = 2a = 2u + v$ und $B = 2b = v$ ganze Zahlen. Wenn $B = v$ gerade ist, dann ist auch A gerade. Wenn $B = v$ ungerade ist, dann ist auch A ungerade. Daher haben wir

$$x \in \mathfrak{o}_K \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} & d = 4k + 3 \text{ oder } 4k + 2 \\ A = 2a, B = 2b \in \mathbb{Z} \ + A, B \text{ sind beide gerade} & d = 1 + 4k. \\ A = 2a, B = 2b \in \mathbb{Z} \ + A, B \text{ sind beide ungerade} & d = 1 + 4k. \end{cases}$$

Wir sehen uns nun die 3 Fälle unsere Aufgabenstellung an.

Fall 1: Sei $d = -1$. Dann ist

$$\mathfrak{o}_K = \{a + b\sqrt{-1} | a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Daher, $x \in \mathfrak{o}_K^*$ genau dann, wenn $N(x) = a^2 + b^2 = 1$. Es folgt, dass $b^2 < 2$ und $a^2 < 2$. Daher sind die einzigen ganzalgebraischen Lösungen dieser Gleichung $a = 0, b = \pm 1$ und $a = \pm 1, b = 0$. Diese korrespondieren zu $x = \pm 1, \pm i$.

Fall 2: Sei $d = -3$. Dies führt uns zur Gleichung $a^2 + 3b^2 = 1$, was äquivalent ist zu $A^2 + 3B^2 = 4$, wobei A und B ganze Zahlen sind und beide gerade oder ungerade. Es ist direkt ersichtlich, dass $B^2 = 0, 1$, daher ist $B = -1, 0, 1$. Die dazugehörigen Lösungen sind $A = \pm 1$, ± 2, ± 1, daher: $(\pm 1, -1), (\pm 2, 0)$ und $(\pm 1, 1)$.

Fall 3: Sei $d < -3$. Als erstes betrachten wir die Fälle $d = 2, 3 mod 4$. Die Gleichung $a^2 - db^2 = 1$ und die Bedingung $d < -3$ impliziert, dass $a^2 - db^2 > 3$, es sei denn $b = 0$. Daher gilt $b = 0$ und $x = \pm 1$.

Aus $d = 1 \mod 4$ folgt, dass die Gleichung$a^2 - db^2 = 1$ äquivalent ist zu $A^2 - dB^2 = 4$. Wenn $d < 3$, dann ist $B = 0$, da sonst $A^2 - dB^2 > 4$ gelten würde. Daher ist $A = 0$ und $x = \pm 1$.

Es bleibt der Fall $d = -2$. In diesem Fall ist $a^2 + 2b^2 = 1$. Aus $b \neq 0$ folgt, dass $a^2 + 2b^2 > 2$, also muss $b = 0$ sein und daher $x = \pm 1$.

ii) Wir haben $(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 1$, woraus folgt, dass $v = 3 - 2\sqrt{2}$ eine Einheit ist. Da die Einheiten eines Ringes eine multiplikative Untergruppe formen, muss v^n auch eine Einheit sein, für jeden $n \in \mathbb{Z}$. Diese Elemente sind alle verschieden, da sonst $a^{n+m} = a^n$ für $m \neq 0$ gelte. Es würde folgen, dass $a^m = 1$. Da das Körper K ein Unterkörper der Reellen zahlen ist, haben wir $a = \pm 1$, was ein Widerspruch wäre. □