Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 7

Aufgaben 7

Aufgabe 1 (1 Punkt). Finde alle n, so dass $\frac{1+\sqrt{n}}{2}$ ganzalgebraisch ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Zeige, dass

$$x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{21} + \sqrt{33} - \sqrt{77})$$

ganzalgebraisch ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(i)$ und $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Ist

$$b = \frac{1}{2}(1 + i + \sqrt{2}) \in L$$

ganzalgebraisch über K?

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei

$$c = \frac{1}{3^{4/3}} - \frac{1}{3^{2/3}}.$$

Stelle es als ein Bruch $\frac{a}{b}$ dar, wobei a Ganzalgebraisch ist und $b \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte). Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{m}_\alpha = x^3 - 7$ mit Basis

$$\mathcal{B} = \{1, \alpha, \alpha^2\}.$$

i) (1 Teilpunkt) Was ist die Diskriminante dieser Basis? (*Tipp: Alte Übungsblätter könnten helfen.*)

ii) (3 Teilpunkte, je $0,5$ Punkte): Was ist die Norm der folgenden Elemente: (*Tipp: Mit Formeln arbeiten ist hier einfacher, als Definition benutzen.*)

1. α^2,
2. $1 - \alpha$,
3. $1 + \alpha + \alpha^2$,
4. $1 + 2\alpha + 2\alpha^2$,
5. $1 + 2\alpha + 3\alpha^2$,
6. $2 + \alpha + 5\alpha^2$.

Aufgabe 6 (2 Punkte). Sei $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ irreduzibel mit α eine Nullstelle. Bestimme die Norm von

$$1 + \alpha + \alpha^2.$$