Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 7

Aufgabe 1 (1 Punkt). Finde alle n, so dass $\frac{1+\sqrt{n}}{2}$ ganzalgebraisch ist.

Lösung. Wir wollen bestimmen, ob das Minimalpolynom in $\mathbb{Z}[X]$ liegt (dies reichte ja aus). Das Minimalpolynom von $\alpha = \frac{1+\sqrt{n}}{2}$ findet man, indem man $2\alpha - 1$ quadriert. Dies ergibt

$$\mathfrak{m}_\alpha = x^2 - x + \frac{(1-n)}{4},$$

da das Minimalpolynom, bei Definition, normiert sein muss. Als solches muss $\frac{(1-n)}{4} \in \mathbb{Z}$ gelten, was wiederum $n = 1 \mod 4$ bedeutet. □

Aufgabe 2 (2 Punkte). Zeige, dass

$$x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{21} + \sqrt{33} - \sqrt{77})$$

Ganzalgebraisch ist.

Lösung. Wir haben

$$4x = 1 + \sqrt{21} + \sqrt{33} - \sqrt{77}, \tag{1}$$

was nach quadrieren und mit 4 kürzen

$$4x^2 = 33 - 5\sqrt{21} - 3\sqrt{33} + \sqrt{77} \tag{2}$$

ergibt. Indem wir Gleichung (1) mit (2) multiplizieren erhalten wir

$$2x^3 = -31 + 9\sqrt{21} + 9\sqrt{33} - 7\sqrt{77}. \tag{3}$$

Durch das Multiplizieren der Gleichungen (1) und (3) erhalten wir nun

$$4x^4 = 497 - 99\sqrt{21} - 67\sqrt{33} + 39\sqrt{77}. \tag{4}$$

Mithilfe der ersten 3 Gleichungen können wir $\sqrt{21}, \sqrt{33}$ und $\sqrt{77}$ eliminieren um

$$\begin{aligned} \sqrt{21} &= -2 + 12x - 2x^2 - x^3 \\ \sqrt{33} &= 21 - 26x + 2x^2 + 2x^3 \\ \sqrt{77} &= 20 - 18x + x^3 \end{aligned}$$

zu erhalten. Man kann nun einen beliebigen dieser Gleichungen in (4) ein setzen um

$$x^4 - x^3 - 16x^2 + 37x - 17 = 0$$

zu erhalten, was die Ganzheit von x beweist. □

Aufgabe 3 (1 Punkt). Sei $K = \mathbb{Q}(i)$ und $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$. Ist

$$b = \frac{1}{2}(1 + i + \sqrt{2}) \in L$$

ganzalgebraisch über K?

Lösung. Es gilt $\sqrt{2} = 2b - 1 - i$ woraus

$$(2b - 1 - i)^2 = 4$$

folgt. Als solches ist b die Nullstelle des Polynoms

$$x^2 - (i + 1)x + \frac{1}{2}i - 1 = 0,$$

welches das Minimalpolynom sein muss, auf Grund der Tatsache, dass $[L : K] = 2$. Daher kann b nicht ganzalgebraisch über K sein. □

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei

$$c = \frac{1}{3^{4/3}} - \frac{1}{3^{2/3}}.$$

Stelle es als ein Bruch $\frac{a}{b}$ dar, wobei a Ganzalgebraisch ist und $b \in \mathbb{Z}$.

Lösung. Wir haben

$$c = 3^{-4/3} - 3^{-2/3}$$

woraus

$$\begin{aligned} c^3 &= 3^{-4} - 3 \cdot 3^{-8/3} \cdot 3^{-2/3} + 3 \cdot 3^{-4/3} \cdot 3^{-4/3} - 3^{-2} \\ &= = 3^{-4} - 3^{-2} - 3^{-1}(3^{-4/3} - 3^{-2/3}) \end{aligned}$$

folgt. Es folgt, dass

$$c^3 = \frac{1}{81} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3}c,$$

also ist c die Nullstelle des Polynoms

$$x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{8}{81} = 0.$$

Indem wir beide Seiten mit $81^3 = 3^{12}$ multiplizieren, erhalten wir

$$(81x)^3 + 3^7(81x) + 8 \cdot 3^8 = 0.$$

Als solches it $a = 81c$ ganzalgebraisch, da es die Gleichung

$$y^3 + 3^7 y + 8 \cdot 3^8 = 0$$

erfüllt. Wir haben also

$$c = \frac{a}{81}.$$

□

Aufgabe 5 (4 Punkte). Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\mathfrak{m}_\alpha = x^3 - 7$ mit Basis

$$\mathcal{B} = \{1, \alpha, \alpha^2\}$$

.

i) (1 Teilpunkt) Was ist die Diskriminante dieser Basis?

ii) (3 Teilpunkte, je 0,5 Punkte): Was ist die Norm der folgenden Elemente:

1 α^2,

2 $1-\alpha$,

3 $1+\alpha+\alpha^2$,

4 $1+2\alpha+2\alpha^2$,

5 $1+2\alpha+3\alpha^2$,

6 $2+\alpha+5\alpha^2$.

Lösung. i) Es gilt $\mathsf{N}(\alpha) = (-1)^3(-7) = 7$. Wir benutzen die Formel

$$\Delta(\mathcal{B}) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}}\mathsf{N}(\mathfrak{m}'(\alpha)),$$

was uns

$$\Delta(\mathcal{B}) = (-1)^{\frac{3\cdot 2}{2}}\mathsf{N}(3\alpha^2) = -\mathsf{N}(3)\mathsf{N}(\alpha)^2 = -3^3\cdot 7^2$$

gibt.

ii) Wir benutzen unsere Formeln für die Norm (Verträglichkeit mit dem Produkt, Norm von $r-\alpha$ etc.).

1 $\mathsf{N}(\alpha^2) = \mathsf{N}(\alpha)^2 = 7^2$,

2 $\mathsf{N}(1-\alpha) = \mathfrak{m}_\alpha(1) = 1^3 - 7 = -6$,

3 $\mathsf{N}(1+\alpha+\alpha^2)\mathsf{N}(1-\alpha) = \mathsf{N}(1+\alpha+\alpha^2-\alpha-\alpha^2-\alpha^3) = \mathsf{N}(-6) = -216 \Rightarrow \mathsf{N}(1+\alpha+\alpha^2) = 36$,

4 $\mathsf{N}(1+2\alpha+2\alpha^2)\mathsf{N}(1-\alpha) = \mathsf{N}(1+2\alpha+2\alpha^2-\alpha-2\alpha^2-2\alpha^3) = \mathsf{N}(-13+\alpha) = -(\mathfrak{m}_\alpha(13)) = -13^3+7 = -2190 \Rightarrow \mathsf{N}(1+2\alpha+2\alpha^2) = 365$,

5 $\mathsf{N}(1+2\alpha+3\alpha^2)\mathsf{N}\left(1-\frac{3}{2}\alpha\right) = \mathsf{N}\left(1+2\alpha+3\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha-3\alpha^2-\frac{9}{2}\alpha^3\right) = \mathsf{N}\left(-\frac{61}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right) = \mathsf{N}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathsf{N}(61-\alpha) = -\frac{1}{2^3}\mathfrak{m}_\alpha(61) = -\frac{61^3-7}{2^3}$. Auf der anderen Seite ist $\mathsf{N}(1-\frac{3}{2}\alpha) = \mathsf{N}\left(\frac{3}{2}\right)\mathsf{N}\left(\frac{2}{3}-\alpha\right) = \frac{3^3}{2^3}\mathfrak{m}_\alpha\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3^3}{2^3}\left(\frac{2^3}{3^3}-7\right) = 1-\frac{3^3\cdot 7}{2^3} = \frac{2^3-3^3\cdot 7}{2^3}$. Daher ist $\mathsf{N}(1+2\alpha+3\alpha^2) = -\frac{61^3-7}{2^3}\cdot\frac{2^3}{2^3-3^3\cdot 7} = 1254$.

6 $\mathsf{N}(2+\alpha+5\alpha^2)\mathsf{N}\left(\frac{1}{5}-\alpha\right) = \mathsf{N}\left(-\frac{173}{5}-\frac{9}{5}\alpha\right) = \frac{9^3}{5^3}\cdot\mathfrak{m}_\alpha\left(-\frac{173}{9}\right) = -\frac{9^3}{5^3}\cdot\frac{173^3+7\cdot 9^3}{9^3} = -\frac{173^3+7\cdot 9^3}{5^3}$. Auf der anderen Seite ist $\mathsf{N}\left(\frac{1}{5}-\alpha\right) = \mathfrak{m}_\alpha\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1-7\cdot 5^3}{5^3} = -\frac{874}{125}$, was uns $\mathsf{N}(2+\alpha+5\alpha^2) = \frac{173^3+7\cdot 9^3}{5^3}\cdot\frac{125}{874} = \frac{173^3+7\cdot 9^3}{874} = 1186\cdot 125 = 148250$ gibt.

□

Aufgabe 6 (2 Punkte). Sei $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$ irreduzibel mit α eine Nullstelle. Bestimme die Norm von

$$1+\alpha+\alpha^2.$$

Beweis. Man es direkt oder per Variablenwechsel machen um das Polynom zu normalisieren. Direkt geht es wie folgt:

Wir wollen α^2 loswerden, also schreiben wir

$$(1\alpha+\alpha^2)(1-z\alpha) = (1+cz)+[1+z(b-1)]\alpha+[1+z(a-1)]\alpha^2.$$

Wir wollen, dass

$$1+z(a-1) = 0,$$

was zu

$$z = \frac{1}{1-a}$$

führt. Daher ist

$$(1+\alpha+\alpha^2)\left((1-a)-\alpha\right) = (1-a+c)+(b-a)\alpha.$$

Nun können wir die Norm von $(1-a)-\alpha$ und von $(1-a+c)+(b-a)\alpha$ berechnen, denn es gilt

$$\mathsf{N}\left((1-a)-\alpha\right) = \mathfrak{m}_\alpha(1-a)$$

und

$$\mathsf{N}((1-a+c)+(b-a)\alpha) = (b-a)^3\mathfrak{m}_\alpha\left(\frac{1-a+c}{b-a}\right).$$

Mit der Variablenwechsel würden wir $y = x - \frac{a}{3}$ machen und die Gleichung

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}\right)$$

erhalten. Dies ist nun das Minimalpolynom von $\beta = \alpha - \frac{a}{3}$. Das heißt, wir können nun die Norm von

$$1 + \left(\beta + \frac{a}{3}\right) + \left(\beta + \frac{a}{3}\right)^2$$

bestimmen, was gleich der Norm von $1+\alpha+\alpha^2$ sein wird. □