Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 6

Aufgaben 6

Aufgabe 1 (1 Punkt). Sei K ein algebraisches Zahlenkörper mit

$$[K : \mathbb{Q}] = 2.$$

Beweise, dass $K = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$, für irgendeine quadratfreie Zahl $a \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (1 Punkt). Sein $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so dass $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 2$. Beweise, dass

$$\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\alpha + \beta).$$

Aufgabe 3 (5 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, wobei $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

i) Finde die Konjugierten von α.

ii) Liste alle Einbettungen $K \to \mathbb{C}$.

iii) Finde die Norm und die Spur von α.

iv) Zeige, dass

$$\mathcal{B} = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$$

eine $\mathbb{Q}$-Basis von K ist.

v) Berechne die Diskriminante

$$\Delta(\mathcal{B}).$$

Aufgabe 4 (1 Punkt). Sei $[L : K] = p$ eine Primzahl. Beweise, dass jedes Element $\alpha \in L \setminus K$ primitiv ist. Das heißt, dass

$$L = K(\alpha).$$

Aufgabe 5 (4 Punkte). Sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und $\beta = e^{\frac{2\pi i}{3}}\alpha$. Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.

i) Finde die Konjugierten von α mithilfe des Minimalpolynoms von $\sqrt[3]{2}$.

ii) Zeige, dass $\mathbb{Q}(\alpha) \simeq \mathbb{Q}(\beta)$ indem man das Minimalpolynom von α bestimmt.

iii) Zeige, dass $\alpha \notin \mathbb{Q}(\beta)$ und $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$.

iv) Beschreibe alle Einbettungen $K \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 6 (2 Punkte). Sei $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

i) Zeige, dass

$$\mathcal{B} = \{2, \sqrt[3]{2} + 1, \sqrt[3]{4} + 1\}$$

eine $\mathbb{Q}$-Basis von K ist.

ii) Berechne die Diskriminante

$$\Delta(\mathcal{B}).$$

Aufgabe 7 (3 Punkte). Sein $p, q \in \mathbb{Z}$, so dass $f(x) = X^3 + px + q$ irreduzibel über $\mathbb{Z}[X]$ ist und sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von $f(x)$.

i) Beweise, dass $\mathsf{Sp}(1) = 3, \mathsf{Sp}(\alpha) = 0, \mathsf{Sp}(\alpha^2) = -2p$ und $\mathsf{Sp}(\alpha^3) = -3q$.

ii) Was ist $\mathsf{Sp}(\alpha^4)$?

iii) Beweise, dass

$$\Delta(1, \alpha, \alpha^2) = -4p^3 - 27q^2.$$