Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 5

Aufgaben 5

Aufgabe 1 (1 Punkt). Sein $f(x_1,\dots,x_n)$, $g(x_1,\dots,x_n) \in K[X_1,\dots,X_n]$. Zeige, dass das Leitmonomial von $fg \in K[X_1,\dots,X_n]$ gleich dem Produkt der Leitmonomiale von f und g ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Stelle die folgenden Polynome als polynomiale Kombination der elementaren symmetrischen Polynome dar:

i) $f = x^2 + y^2 + z^2 \in K[X,Y,Z]$

ii) $g = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \in K[X,Y,Z]$

iii) $h = x^4y^2 + x^2y^4 + x^2y^2z^2 + x^4z^2 + x^2z^2y^2 + x^2z^4 + y^2z^2x^2 + y^4z^2 + y^2z^4 \in K[X,Y,Z]$ (*Tipp: Hier kann man vielleicht etwas vereinfachen...vielleicht auf etwas schon bekanntest beziehen?*)

iv) $i = (x-2y)^2(y-2x)^2 \in K[X,Y]$.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sein $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}$ die Nullstellen des Polynoms

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 6x.$$

Ohne die Nullstellen zu bestimmen, berechne

- $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$
- $\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha^2\delta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta^2\delta + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \gamma^2\delta + \alpha\delta^2 + \beta\delta^2 + \beta\delta^2$
- Beweise, dass
$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$
irrational ist.

Aufgabe 4 (1 Punkt). Sein $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ die Wurzel des Polynoms

$$f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Bestimme die Summe $x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

Aufgabe 5 (2 Punkte). Finde λ, so dass eines der Wurzeln von $f(t) = t^3 - 7t + \lambda$, doppelt so groß ist wie eines der Anderen.