Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 5

Aufgabe 1 (1 Punkt). Sein $f(x_1,\dots,x_n)$, $g(x_1,\dots,x_n) \in K[X_1,\dots,X_n]$. Zeige, dass das Leitmonomial von $fg \in K[X_1,\dots,X_n]$ gleich dem Produkt der Leitmonomiale von f und g ist.

Lösung. Dies ist recht klar, hauptsächlich Notationsfrage. Sei

$$x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\cdots x_n^{a_{1n}}$$

das Leitmonomial von f. Also, für jeden anderen Monomial

$$x_1^{a_{i1}}x_2^{a_{i2}}\cdots x_n^{a_{in}}$$

gibt es ein $1 \le k \le n$, so dass

$$a_{11} = a_{i1}, a_{12} = a_{i2}, \dots, a_{1k-1} = a_{ik-1}, a_{1k} > a_{ik}.$$

Analog, sei

$$x_1^{b_{11}}x_2^{b_{12}}\cdots x_n^{b_{1n}}$$

das Leitmonomial von g. Also, für jeden anderen Monomial

$$x_1^{b_{j1}}x_2^{b_{j2}}\cdots x_n^{b_{jn}}$$

gibt es ein $1 \le l \le n$, so dass

$$b_{11} = b_{j1}, b_{12} = b_{j2}, \dots, b_{1l-1} = b_{jl-1}, b_{1l} > b_{jl}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{12}}\cdots x_n^{a_{1n}})(x_1^{b_{11}}x_2^{b_{12}}\cdots x_n^{b_{1n}}) &= x_1^{a_{11}+b_{11}}x_2^{a_{12}+b_{12}}\cdots x_n^{a_{1n}+b_{1n}} \\ &> x_1^{a_{i1}+b_{j1}}x_2^{a_{i2}+b_{j2}}\cdots x_n^{a_{in}+b_{jn}},\end{aligned}$$

denn, sei $m = \min(k,l)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a_{11}+b_{11} &= a_{i1}+b_{j1} \\ a_{12}+b_{12} &= a_{i2}+b_{j2} \\ &\vdots \\ a_{1m-1}+b_{1m-1} &= a_{im-1}+b_{im-1} \\ a_{1m}+b_{1m} &> a_{im}+b_{im},\end{aligned}$$

da entweder $a_{1m} > a_{1m}$ und $b_{1m} \ge b_{im}$ oder $a_{1m} \ge a_{1m}$ und $b_{1m} > b_{im}$. □

Aufgabe 2 (4 Punkte). Stelle die folgenden Polynome als polynomiale Kombination der elementaren symmetrischen Polynome dar:

i) $f = x^2+y^2+z^2 \in K[X,Y,Z]$

ii) $g = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 \in K[X,Y,Z]$

iii) $h = x^4y^2 + x^2y^4 + x^2y^2z^2 + x^4z^2 + x^2z^2y^2 + x^2z^4 + y^2z^2x^2 + y^4z^2 + y^2z^4 \in K[X,Y,Z]$ (*Tipp: Hier kann man vielleicht etwas vereinfachen...*)

iv) $i = (x-2y)^2(y-2x)^2 \in K[X,Y]$.

Lösung. Sei $x > y > z$.

i) Wir sehen uns den Leitmonomial an, was x^2 ist. Daher betrachten wir uns $s_1^{b_1}$ an, mit $b_1 = a_1 = 2$. Dies ergibt

$$s_1^2 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = f + 2s_2.$$

Nach Umformung ergibt es

$$f = s_1^2 - 2s_2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + xz + yz).$$

ii) Hier ist das Leitmonomial x^2y^2. Als solches, betrachten wir $s_1^{b_1}s_2^{b_2}$, wo $b_2 = a_2 = 2$ und $b_1 + b_2 = 2 \Rightarrow b_1 = 0$. Wir haben also

$$\begin{aligned} s_1^0 s_2^2 &= (x+y+z)^0(xy+xz+yz)^2 \\ &= x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2) \\ &= g + 2(x^2yz + xy^2z + xyz^2). \end{aligned}$$

Nun müssen wir das Algorithmus nochmal anwenden, aber hier ist das Leitmonomial x^2yz, was vom kleinerem "Grad" (Ordnung) ist. Wir betrachten wieder $s_1^{b_1}s_2^{b_2}s_3^{b_3}$ mit $b_3 = a_3 = 1$, $b_2 + b_3 = b_2 + 1 = a_2 = 1$, also $b_2 = 0$ und $b_1 + b_2 + b_3 = b_1 + 1 = a_1 = 2$, also $b_1 = 1$. Daher schreiben wir

$$s_1 s_3 = (x+y+z)(xyz) = (x^2yz + xy^2z + xyz^2).$$

Zurück eingesetzt ergibt es

$$g = s_2^2 - 2s_1s_3.$$

iii) Mann muss hier merken, dass $h = fg$. Als solches gilt $h = (s_1^2 - 2s_2)(s_2^2 - 2s_1s_3)$.

iv) Hier kann man leider nicht einfach die Potenzen weglassen, da es sonst nicht mehr symmetrisch sein wird. Wir schreiben $i = 4x^4 - 20xy^3 + 4y^4 - 20x^3y + 33x^2y^2$, was Leitkoeffizient $4x^4$ hat. Wir betrachten $s_1^4 = (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$. Es gilt

$$i_1 := i - 4s_1^4 = 9y^2x^2 - 36xy^3 - 36x^3y.$$

Das Leitkoeffizient ist nun $-36x^3y$, weswegen wir uns $s_1^{b_1}s_2^{b_2}$, mit $b_2 = 1, b_1 + b_2 = 3$, also $b_1 = 2$ ansehen. Dies ergibt $s_1^2s_2 = (x+y)^2(xy) = x^3y + 2x^2y^2 + xy^3$, was uns

$$i_1 + 36s_1^2s_2 = 81x^2y^2 = 81s_2^2$$

gibt. Daher haben wir

$$i = 81s_2^2 + 4s_1^4.$$

□

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sein $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ die Nullstellen des Polynoms

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6.$$

Ohne die Nullstellen zu bestimmen, berechne

i) $g = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$

ii) $h = \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha^2\delta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta^2\delta + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \gamma^2\delta + \alpha\delta^2 + \beta\delta^2 + \beta\delta^2$

iii) Beweise, dass

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

irrational ist.

Lösung. Sei $\alpha > \beta > \gamma > \delta$.

i) Wir sehen uns wieder s_1^2 an. Wir haben

$$\begin{aligned} s_1^2 &= (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) \\ &= g + 2s_2. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$g = s_1^2 - 2s_2 = (-a_3)^2 - 2(a_2) = (2)^2 - 2 \cdot 4 = 4 - 8 = -4,$$

wobei a_3 und a_2 die Koeffizienten von $f(x)$ sind.

ii) Das Leitmonomial ist $\alpha^2\beta$, daher sehen wir uns

$$s_1^{b_1} s_2^{b_2}$$

an, wo $b_2 = 1$ und $b_1 + b_2 = 2 \Rightarrow b_1 = 1$. Wir haben

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= (\alpha + \beta + \gamma + \delta)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) \\ &= \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha^2\delta + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \\ &+ \alpha\beta^2 + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta^2\gamma + \beta^2\delta + \beta\gamma\delta + \\ &+ \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma^2 + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2 + \beta\gamma\delta + \gamma^2\delta + \\ &+ \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\delta^2 + \beta\gamma\delta + \beta\delta^2 + \gamma\delta^2 \\ &= (\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \alpha^2\delta + \alpha\beta^2 + \beta^2\gamma + \beta^2\delta + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \gamma^2\delta + \alpha\gamma^2 + \beta\gamma^2 + \delta\gamma^2) + \\ &+ 3(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta) \\ &= h + 3s_3. \end{aligned}$$

Es folgt $h = s_1 s_2 - 3s_3 = (-a_3)(a_2) - 3(-a_1) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 = 8$.

iii) Da f irreduzibel ist, bei Eisenstein für $p = 2$ und monisch, ist $f = \mathfrak{m}_\delta$, das Minimalpolynom von δ.

Sei $l = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \in \mathbb{Q}$. Da $k = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3$ symmetrisch ist, folgt, dass $k \in \mathbb{Q}$ und daher $k - l \in \mathbb{Q}$.

Es folgt, dass δ eine Wurzel von

$$X^3 - q$$

ist, wobei $q = \delta^3 \in \mathbb{Q}$. Daher ist $X^3 - q$ ein vielfaches von f, was vom Grad her unmöglich ist.

□

Aufgabe 4 (1 Punkt). Sein $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ die Wurzel des Polynoms

$$f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Bestimme die Summe $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2$.

Lösung. Sei $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} s_1^2 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)^2 \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots \alpha_n^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_1) \\ &= \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 + 2s_2. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 = s_1^2 - 2s_2 = (-a_{n-1})^2 - 2a_{n-2} = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}.$$

□

Aufgabe 5 (2 Punkte). Finde λ, so dass eines der Wurzeln von $f(t) = t^3 - 7t + \lambda$, doppelt so groß ist wie eines der Anderen.

Lösung. Sein α_i, $1 \le i \le 3$ die Wurzeln von $f(t)$. Unsere Voraussetzung sagt $\alpha_2 = 2\alpha_1$ und lass uns schreiben $\alpha_3 = \beta$.

Da $s_1 = -a_{n-1} = a_2 = 0$ folgt

$$\text{I.} \quad \alpha + 2\alpha + \beta = 0,$$

aus $s_2 = a_1 = 7$ folgt

$$\text{II.} \quad \alpha \cdot 3\alpha + \alpha\beta + 3\alpha\beta = 7$$

und von $s_3 = a_0 = \lambda$ erhalten wir

$$\text{III.} \quad \alpha \cdot 3\alpha\beta = \lambda.$$

Nach Umformen der ersten zwei Gleichung haben wir $\alpha^2 = 1$, also $\alpha = \pm 1$ und $\beta = \mp 3$. Gleichung III gibt uns nun $\lambda = \pm 6$. □