Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 4

Aufgaben 4

Aufgabe 1 (1 Punkt). Sei $f(x) \in K[X]$ ein Polynom. Beweise, dass es genau dann irreduzibel ist, wenn $f(x+a), a \in K$ irreduzibel ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Beweise mithilfe von Eisensteins Kriterium, dass folgende Polynome irreduzibel sind:

(i) $x^4 + 2x^3 + 2x + 2$

(ii) $x^4 + 9$.

Aufgabe 3 (3 Punkte). *Kreisteilungspolynome* bzw. *zyklotomische Polynome* sind die irreduziblen Teiler des Polynoms $x^n - 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Diese werden mit Φ_n bezeichnet. Für den Fall $n = p$ Primzahl, sind diese besonders einfach (und wichtig). Basierend auf die vorige Aufgabe 1, beweise, dass

$$\Phi_p := x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1.$$

Also, dass das obige Polynom $(1 + x + \cdots + x^{p-1})$ irreduzibel ist und ein Teiler von $x^p - 1$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Finde alle reduziblen Polynome (über $\mathbb{Q}$) der Form

$$t^5 + at^3 + bt + 1,$$

wobei $a, b \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 5 (2 Punkte). Ist das Polynom

$$x^6 + 7x^5 + 2x^2 + 18x + 28$$

irreduzibel? Wenn ja, beweise. Wenn nicht, faktorisiere es in irreduzible Komponente.

Aufgabe 6 (2 Punkte). Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n_1} x^{n-1} + a_n x^n$ irreduzibel. Beweise, dass auch $g(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ irreduzibel ist. (*Tipp*: Man schreibe $g(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$.)