Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 3

Aufgaben 3

Aufgabe 1 (1 Punkt). Sei $K \to L$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Beweise, dass es genau dann eine Isomorphie

$$K[X] \to K[\alpha]$$

von Ringen gibt, wenn α *nicht* algebraisch über K ist.

Aufgabe 2. [1 Punkt] Sei K ein Körper. Beweise, dass $\{1, X, X^2, \dots, X^{d-1}\}$ eine K-Basis von $K[X]/f(x)$, für jeden irreduziblen Polynom $f(x) \in K[X]$ von Grad d definiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte insgesamt). Sei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ das Körper mit 2 Elementen.

1. (1 Teilpunkt) Beweise, dass $f(x) = x^2 + x + 1$ irreduzibel ist über $\mathbb{F}_2$ und schlussfolgere, dass es einen Körper mit 4 Elementen gibt.
2. (1 Teilpunkt) Wenn wir diesen Körper mit Elementen der Form $(a, b), a, b \in \mathbb{F}_2$ gleichsetzen, gebt die Formel für
$$(a, b) + (c, d)$$
und
$$(a, b)(c, d).$$
3. (2 Teilpunkt) Beweise, dass $x^3 + x + 1$ und $x^3 + x^2 + 1$ irreduzibel sind über $\mathbb{F}_2$. Sind die korrespondierenden Körper mit 8 Elementen isomorph?

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei $0 \neq R$ ein endlicher Integritätsbereich, ungleich dem Nullring. Das heißt, $|R| < \infty$. Beweise, dass R ein Körper ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte insgesamt). Sei $\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ eine Körpererweiterung. Finde die Minimalpolynome (über $\mathbb{Q}$) zu den folgenden Elementen (in $\mathbb{C}$).

1. (2 Teilpunkt) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
3. (2 Teilpunkt) $\cos(\frac{2\pi}{5})$. (*Tipp: Hier kann man folgende Gleichung benutzen:)*
$$\cos(5\theta) = \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta).$$

Aufgabe 6 (5 Punkte insgesamt). Sei $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{6}$ und sei $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

1. (2 Teilpunkte) Finde das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.
2. (0,5 Teilpunkt) Beweise, dass $\sqrt{30} \in L$.

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{30})$.

3. (0,5 Teilpunkt) Finde die Grade der Erweiterungen
$$[K : \mathbb{Q}], [L : K] \text{ und } [L : \mathbb{Q}].$$

4. (1 Teilpunkt) Finde das Minimalpolynom von α über K.

5. (1 Teilpunkt) Beweise, dass $L \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{6})$.

Aufgabe 7 (2 Punkte). Finde das Minimalpolynom von $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ über $\mathbb{Q}$. Was sind die anderen Wurzeln dieses Polynoms?

Aufgabe 8 (1 Punkt). Sei R ein Ring. Kann es mehr als einen Elementen $x \in R$ geben, so dass

$$2x = 1?$$