Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 2

1 Aufgaben 2

Aufgabe 1 (2 Punkte insgesamt). Sei M ein Monoid und $S \subseteq M$ ein Untermonoid.

1. (1 Teilpunkt) Beweise, dass $S^{-1}M$, definiert wie in der Vorlesung, ein Monoid ist. Das heißt, zeig, dass die Relation $\simeq$ auf $S^{-1}M$, gegeben durch

$$(m_1, s_1) \simeq (m_2, s_2),$$

genau dann wenn es einen Elementen $t \in S$ gibt mit

$$m_1 s_2 t = m_2 s_1 t,$$

eine Kongruenzrelation ist.

2. (1 Teilpunkt) Habe $M = R$ nun eine zusätzliche Ringstruktur. Beweise, dass unter

$$(m_1, s_1) + (m_2, s_2) := (m_1 s_2 + m_2 s_1, s_1 s_2),$$

$S^{-1}R$ ein Ring wird. Also, dass die obige Kongruenzrelation mit dieser Addition verträglich ist.

Bei der folgenden Aufgabe kann man entweder Teil 1 oder 1 machen, darf jedoch für Teil 2, Teil 1 annehmen.*

Aufgabe 2 (2 Punkte insgesamt).

1. (1 Teilpunkt) Sei M ein kommutativer Monoid, $S \subseteq M$ ein Untermonoid und $S^{-1}M$ die Lokalisation von M mit S. Zeige, dass unter der kanonischen Abbildung

$$\gamma : M \to S^{-1}M, \quad m \mapsto (m, 1),$$

$S \subseteq M$ in die Einheiten von $S^{-1}M$ geht. Also, dass $\gamma(S) \subseteq (S^{-1}M)^*$. Des weiteren, beweise, dass γ genau dann injektiv ist (auf ganz M), wenn aus $ac = bc$, folgt, dass $a = b$ für jeden $a, b \in M$ und $c \in S$.

1.* Sei M ein kommutativer Monoid. Zeige, dass die Lokalisation $M^{-1}M$ eine abelsche Gruppe und die natürliche Abbildung

$$M \to M^{-1}M, \quad m \mapsto (m, 1)$$

genau dann injektiv ist, wenn aus $ac = bc$, folgt, dass $a = b$ für jeden $a, b, c \in M$.

2. (1 Teilpunkt) Sei R ein Integritätsbereich. Beweise mithilfe des obigen Arguments, dass $(R \setminus \{0\})^{-1}R$ ein Körper ist und dass die natürliche Abbildung $R \to (R \setminus \{0\})^{-1}R$ injektiv ist.

Aufgabe 3. [1 Punkt] Sei M ein kommutatives Monoid und $S \subseteq M^*$ ein Untermonoid, wo jedes Element invertierbar in M ist. Beweise, dass $S^{-1}M \simeq M$.

Aufgabe 4 (1 Punkt). Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ ein Untermonoid mit $0 \in S$. Was kann man über

$$S^{-1}R$$

sagen?

Aufgabe 5. [1 Punkt] Sei R ein Ring. Beweise, dass es höchstens ein Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \to R$ gibt. Muss es einen geben? Was wenn R ein Körper ist?

Aufgabe 6 (1 Punkt). Sei $K \to L$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Beweise, dass es genau dann eine Isomorphie

$$K[X] \to K[\alpha]$$

von Ringen gibt, wenn α *nicht* algebraisch über K ist.

Aufgabe 7. [1 Punkt] Sei K ein Körper. Beweise, dass $\{1, X, X^2, \ldots, X^{d-1}\}$ eine K-Basis von $K[X]/f(x)$, für jeden irreduziblen Polynom $f(x) \in K[X]$ von Grad d definiert.

Aufgabe 8 (3 Punkte insgesamt). Sei $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ das Körper mit 2 Elementen.

1. (1 Teilpunkt) Beweise, dass $f(x) = x^2 + x + 1$ irreduzibel ist über $\mathbb{F}_2$ und schlussfolgere, dass es einen Körper mit 4 Elementen gibt.
2. (1 Teilpunkt) Wenn wir diesen Körper mit Elementen der Form $(a, b), a, b \in \mathbb{F}_2$ gleichsetzen, gibt Formel für
$$(a, b) + (c, d)$$
und
$$(a, b)(c, d).$$
3. (1 Teilpunkt) Beweise, dass $x^3 + x + 1$ und $x^3 + x^2 + 1$ irreduzibel sind über $\mathbb{F}_2$. Sind die korrespondierenden Körper mit 8 Elementen isomorph?

Aufgabe 9 (2 Punkte). Sei R ein endlicher Integritätsbereich. Das heißt, $|R| < \infty$. Beweise, dass R ein Körper ist.

Aufgabe 10 (2 Punkte insgesamt). Sei $\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$ eine Körpererweiterung. Finde die Minimalpolynome (über $\mathbb{Q}$) zu den folgenden Elementen (in $\mathbb{C}$).

1. (1 Teilpunkt) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
3. (1 Teilpunkt) $\cos(\frac{2\pi}{5})$

Aufgabe 11 (4 Punkte insgesamt). Sei $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{6}$ und sei $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

1. (0,5 Teilpunkt) Finde das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.
2. (0,5 Teilpunkt) Beweise, dass $\sqrt{30} \in L$.

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{30})$.

3. (1 Teilpunkt) Finde die Grade der Erweiterungen
$$[K : \mathbb{Q}], [L : K] \text{ und } [L : \mathbb{Q}].$$
4. (1 Teilpunkt) Finde das Minimalpolynom von α über K.
5. (1 Teilpunkt) Beweise, dass $L \simeq \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{6})$.

Aufgabe 12 (2 Punkte). Finde das Minimalpolynom von $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ über $\mathbb{Q}$. Was sind die anderen Wurzeln dieses Polynoms?

Aufgabe 13 (2 Punkte). Sei R ein Ring. Kann es mehr als einen Elementen $x \in R$ geben, so dass

$$2x = 1?$$