Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 2

1 Aufgaben

Aufgabe 1 (1 Punkt). Beweise, dass ein Ring R genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn $\{0\} = (0) \subseteq R$ ein Primideal ist.

Lösung. Sei (0) prim und sei $ab = 0$ in R. Daher, $ab \in (0)$ und es muss also $a \in (0)$ oder $b \in (0)$, also $a = 0$ oder $b = (0)$ sein. Andersrum, sei $ab \in (0)$. Wir haben also $ab = 0$ und o.B.d.A $a = 0$, also $a \in (0)$. □

Aufgabe 2 (1 Punkt). Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass das Kern $\mathsf{Ker}(f) \subseteq R$ ein Ideal von R ist.

Lösung. Es gilt $0 \in \mathsf{Ker}(f)$, da $f(0) = 0$. Sein $a, b \in \mathsf{Ker}(f)$ und $r \in R$. Daher, $f(a) = f(b) = 0$. Es folgt, dass $f(a + b) = f(a) + f(b) = f(a + b) = 0$ und somit ist $a + b \in \mathsf{Ker}(f)$. Gleichwie ist $f(ra) = f(r)f(a) = f(r) \cdot 0 = 0$ und somit ist $ra \in \mathsf{Ker}(f)$. □

Aufgabe 3 (1 Punkt). Sei K ein Körper und $R \neq \{0\}$ nicht das Nullring. Beweise, dass ein Ringhomomorphismus $f : K \to R$ immer injektiv ist.

Lösung. Da der Kern $f : K \to R$ ein Ideal von K ist und wir schon bewiesen haben, dass ein Ring K genau dann ein Körper ist, wenn es genau die zwei Ideale $(0) \neq (1)$ hat, wissen wir, dass $\mathsf{Ker}(f) = (0)$ oder $\mathsf{Ker}(f) = (1)$. Im ersten Fall haben wir Injektivität, im zweiten muss $f(1) = 0$ sein. Da aber, bei Definition eines Ringhomomorphismus $f(1) = 1$ gilt, muss $1 = 0$ in R gelten. Dies jedoch gilt nur im Nullring. □

Aufgabe 4 (2 Punkte insgesamt). Sei M ein Monoid und $S \subseteq M$ ein Untermonoid.

1. (1 Teilpunkt) Beweise, dass $S^{-1}M$, definiert wie in der Vorlesung, ein Monoid ist. Das heißt, zeig, dass die Relation $\simeq$ auf $S^{-1}M$, gegeben durch

   $$(m_1, s_1) \simeq (m_2, s_2),$$

   genau dann wenn es einen Elementen $t \in S$ gibt mit

   $$m_1 s_2 t = m_2 s_1 t,$$

   eine Kongruenzrelation ist.

2. (1 Teilpunkt) Habe $M = R$ nun eine zusätzliche Ringstruktur. Beweise, dass unter

   $$(m_1, s_1) + (m_2, s_2) := (m_1 s_2 + m_2 s_1, s_1 s_2),$$

   $S^{-1}R$ ein Ring wird. Also, dass die obige Kongruenzrelation mit dieser Addition verträglich ist.

Lösung. Sein

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} \sim \frac{r}{s}.$$

Das heißt, es gibt $u, v \in S$, sodass

$$uad = ubc \quad \text{und} \quad vps = vqr.$$

1. Wir wollen zeigen, dass
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{ap}{bq} \sim \frac{cr}{ds} = \frac{c}{d} \cdot \frac{r}{s}.$$
Es gilt
$$(apds)(uv) = (uad)(psv) = (ubc)(vps) = (ubc)(vqr) = (crbq)(uv),$$
daher macht $w = uv$ diese Äquivalenz.

2. Wir wollen beweisen, dass
$$\frac{a}{b} + \frac{p}{q} = \frac{aq + bp}{bq} \sim \frac{cs + dr}{ds} = \frac{c}{d} + \frac{r}{s}.$$
Auch hier können wir $w = uv$ nehmen, denn es gilt
$$(aq + bp)dsuv = (adu)qsv + (vps)bdu = ubcqsv + vqrbdu = uvbq(cs + dr)$$

□

Aufgabe 5 (4 Punkte insgesamt). 1. (1 Teilpunkt) Sei M ein kommutativer Monoid, $S \subseteq M$ ein Untermonoid und $S^{-1}M$ die Lokalisation von M mit S. Zeige, dass die Zuordnung

$$\gamma : M \to S^{-1}M, \quad m \mapsto (m, 1),$$

ein Monoidhomomorphismus ist. Wenn $M = R$ ein Ring ist, beweise, dass dies auch ein Ringhomomorphismus ist.

2. (1 Teilpunkt) Beweise, dass unter $\gamma : M \to S^{-1}M$, $S \subseteq M$ in die Einheiten von $S^{-1}M$ geht. Also, dass $\gamma(S) \subseteq (S^{-1}M)^*$.

3. (1 Teilpunkt) Zeige, dass γ genau dann injektiv ist (auf ganz M), wenn $ac = bc$ impliziert $a = b$ für jeden $a, b \in M$ und $c \in S$. Schlussfolgere, dass die Lokalisation $M^{-1}M$ eine abelsche Gruppe und die natürliche Abbildung

$$M \to M^{-1}M, \quad m \mapsto (m, 1)$$

genau dann injektiv ist, wenn aus $ac = bc$, folgt, dass $a = b$ für jeden $a, b, c \in M$.

4. (1 Teilpunkt) Sei R ein Integritätsbereich. Beweise mithilfe des obigen Arguments, dass $(R \setminus \{0\})^{-1}R$ ein Körper ist und dass die natürliche Abbildung $R \to (R \setminus \{0\})^{-1}R$ injektiv ist.

Lösung. 1. Wir haben $1 \mapsto (1, 1)$, was natürlich die Einheit von $S^{-1}M$ ist. Es gilt auch $(a, 1)(b, 1) = (ab, 1)$, was uns ein Monoidhomomorphismus gibt. Bei einem Ring $M = R$, haben wir noch die Verträglichkeit mit der Addition zu beweisen: Es gilt $(a, 1) + (b, 1) = (a + b, 1)$, was die Homomorphieeigenschaft überprüft.

2. Da $s \in S$, ist $\frac{1}{s} \in S^{-1}M$. Weil $\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{s} \sim \frac{1}{1}$, sind wir in den Einheiten der Lokalisation gelandet.

3. Sei γ injektiv und nimm an, $ac = bc$ mit $c \in S$. Das heißt, $\gamma(a) = \frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \gamma(b)$, da $c \in S$. Es folgt $a = b$, was wir wollten.

   Auf der anderen Seite, sei die Bedingung erfüllt und betrachte $\gamma(a) = \gamma(b)$, also $\frac{a}{1} = \frac{b}{1}$. Bei Definition gibt es ein $c \in S$, sodass $ac = bc$, woraus $a = b$, also Injektivität von γ folgt.

   Genau wie bei Teil 2. von diesem Beweis, können wir uns auch überzeugen, dass jedes Element $\frac{a}{b}$ zu einer Einheit in der Lokalisation wird, da $\frac{b}{a}$ ja immer in $M^{-1}M$ liegt. Es folgt, dass $M^{-1}M$ eine Gruppe ist. Dass die kanonische Abbildung γ genau dann injektiv ist, wenn $ab = ac \to b = c$ haben wir schon bewiesen.

4. Da R ein Integritätsbereich ist, ist $R \setminus \{0\}$ ein Untermonoid, also multiplikativ abgeschlossen (und 1 ist drin). Daher ist die Lokalisation definiert.

   Wir wissen schon aus Teil 2 von Aufgabe 4, dass $(R \setminus \{0\})^{-1}R$ ein Ring ist. Es bleibt zu zeigen, dass es ein Körper ist, also, dass jedes Element $\frac{a}{b}, a, b \neq 0$ einen Inversen hat. Dies ist klar, da $\frac{b}{a}$ auch definiert ist.

   Dass $\gamma : R \to (R \setminus \{0\})^{-1}$ injektiv ist kann man von unserem Argument über Monoide implizieren für $S = R \setminus \{0\}$ und der Umformung von $ac = bc$ zu $(a - b)c$. Hier benutzen wir die Tatsache, dass ein Ring auch ein Monoid ist wenn man Addition vergisst.

□

Aufgabe 6 (1 Punkt). Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ ein Untermonoid mit $0 \in S$. Beweise, dass $S^{-1}R \simeq \{0\}$ das Nullring ist.

Lösung. Es ist direkt zu sehen, dass $S^{-1}R = \{0\}$ sein wird, da $0 \in S$, daher gilt

$$\frac{1}{1} \sim \frac{0}{1},$$

denn $1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 \cdot 0$. Hier nehmen wir als unseren "t" die $0 \in S$. □

Aufgabe 7 (1 Punkt). Sei R ein Ring. Beweise, dass es höchstens ein Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \to R$ gibt.

Lösung. Der erst Teil ist ein Korollar von Satz 1.2.12 und Proposition 1.1.5.

Genauer, wir wissen (1.1.5), dass es genau einen Ringhomomorphismus von $\mathbb{Z}$ nach R gibt, sagen wir $f : \mathbb{Z} \to R$. Des weiteren ist $(\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}$. Wenn also $f(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \subseteq R$, dann gibt es einen eindeutigen Ringhomomorphismus $g : \mathbb{Q} \to R$. Die Bedingung, dass $f = g \circ \iota$ fällt weg, da $\mathbb{Z}$ initial ist und es daher immer erfüllt ist, für jeden paar von Ringen R, S. (Ansonsten gebe es ja zwei verschiedene Homomorphismen $f : \mathbb{Z} \to R$ und $g \circ \iota : \mathbb{Z} \to R$).

Das heißt unter der Bedingung $f(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \subseteq R$, haben wir Existenz und Eindeutigkeit schon bewiesen. Es bleibt also noch die Möglichkeit einer Abbildung

$$g : \mathbb{Q} \to R,$$

wo $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ nicht auf die Einheiten von R geht, doch dies führt direkt zum Widerspruch, da

$$g(1) = g\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{2}{1}\right) g\left(\frac{1}{2}\right).$$

Also muss $g(\frac{2}{1}) = g(\iota(2)) = f(2)$ eine Einheit sein.

Es muss natürlich keinen Ringhomomorphismus $\mathbb{Q} \to R$ geben, z.B., sei $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wie schon argumentiert muss eine Einheit auf einer Einheit gehen, aber 2 geht hier auf die Null. □

Aufgabe 8 (2 Punkte). Sei $M = \langle x, y \rangle / x^2 = x, y^2 = y$ das Monoid (kommutativ) mit zwei Erzeugern (genau so wie bei Gruppen) x und y, mit der kleinsten Relation, wo $x^2 = x$ und $y^2 = y$ gilt. Finde alle Lokalisationen $S^{-1}M$ und beschreibe diese in Erzeugern und Relationen (möglichst vereinfacht).

Lösung. Lass uns das Monoid M besser verstehen. Es besteht aus den Elementen $M = \{1, x, y, xy\}$, da bei allen anderen Kombinationen wir schon eine Potenz von x oder y haben. Die Untermonoide sind nun folgende: $S_1 = \{1\}, S_2 = \{1, x\}, S_3 = \{1, y\}, S_4 = \{1, xy\}, S_5 = \{1, x, xy\}, S_6 = \{1, y, xy\}$ und $S_2 = \{1, x, y, xy\}$. Um uns das Leben zu vereinfachen, beweisen wir folgendes:

Behauptung: Sei $e \in S \subseteq M$ ein Element mit $e^2 = e$. Dann ist $e \sim 1$ in $S^{-1}M$.

Es gilt $1 \sim e \cdot \frac{1}{e} = e^2 \cdot \frac{1}{e} \sim e$.

Die Lokalisationen $M_i := S_i^{-1}M$ sind nun

$$M_1 = M, M_2 \simeq \{1, y\}, M_3 \simeq \{1, x\}, M_4 \simeq\simeq M_5 \simeq M_6 \simeq M_7 \simeq \{1\}.$$

Die letzten Gleichung gelten, da wenn wir ab invertieren, wir auch a und b beides invertieren. (Denn wir haben nun $\frac{1}{ab}$ und daher auch $a \cdot \frac{1}{ab} \sim \frac{1}{b}$.) Als solches werden sowohl x, wie auch y gleich 1 gesetzt und wir erhalten nun das triviale Monoid. □