Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 13

Aufgaben 13

Aufgabe 1 (1 Punkt). Sei $(a) = IJ$ ein Hauptbruchideal, so dass I ein Hauptbruchideal ist. Beweise, dass auch J ein Hauptbruchideal ist. Beweise das Gleiche auch für Hauptideale, unter der Annahme, dass alle drei (a), I und J auch Ideale sind.

Aufgabe 2 (1 Punkt). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$. Bestimme die Klassgruppe $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, so dass für jede Primzahl $p \leq c$, wobei c die Minkowski Konstante ist, jedes Maximalideal in der Zerlegung von (p) ein Hauptideal ist.

Beweise, dass $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K) = 1$ ist. Also, dass K ein Hauptidealring/Faktorring ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-10})$. Was ist $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$?

Aufgabe 5 (1 Punkt). Sei K ein Zahlenkörper und $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl, so dass $p \nmid \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$. (Also, p teilt die Klassgruppe nicht).

Sei I ein Ideal von $\mathfrak{o}_K$, so dass $I^p = (\theta)$ ein Hauptideal ist. Beweise, dass I ein Hauptideal ist.

Aufgabe 6 (3 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-14})$.

i) [1 Teilpunkt] Beweise, dass jede Äquivalenzklasse von Idealen (unter der Äquivalenz $\mathrm{Cl} = \mathcal{I}_K^*/\mathcal{P}_K^*$) einen Ideal der Norm ≤ 4 enthält. Des weiteren zeige, dass $(2) = \mathfrak{p}_2^2 = (2, \sqrt{-14})^2$ und $(3) = \mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3 = (3, 1+\sqrt{-14})(3, 1-\sqrt{-14})$.

ii) [1 Teilpunkt] Beweise, dass $(2-\sqrt{-14}) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3^2$.

iii) [1 Teilpunkt] Schlussfolgere, dass $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$ die zyklische Gruppe mit 4 Elementen ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{11})$. Zerlege die Ideale (2), (3) und (5)) in Maximalideale. Beweise, dass jedes der Maximalideal die in der Zerlegung von (2), (3) und (5) vorkommen Hauptideale sind. Schlussfolgere, dass $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K) = 1$ ist.

Aufgabe 8 (5 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. Man darf annehmen, dass $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$ und die verschärfte Konstante

$$c = \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \frac{d!}{d^d}\sqrt{|\Delta(\mathfrak{o}_K)|}$$

benutzen, wobei d der Grad der Erweiterung $[K : \mathbb{Q}]$ ist.

i) [1 Teilpunkt] Faktorisiere die Ideale $(2), (3), (5)$ und (7).

ii) [2 Teilpunkte] Beweise, dass alle Maximalideale die in der Faktorisierung von $(2), (3), (5)$ und (7) vorkommen Hauptideale sind und schlussfolgere, dass $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K) = 1$ ist.