# Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 13

## 0.1 Aufgaben 13

*Aufgabe* 1 (1 Punkt). Sei $(a) = IJ$ ein Hauptbruchideal, so dass $I$ ein Hauptbruchideal ist. Beweise, dass auch $J$ ein Hauptbruchideal ist. Beweise das Gleiche auch für Hauptideale, unter der Annahme, dass alle drei $(a)$, $I$ und $J$ auch Ideale sind.

**Lösung.** Zuerst für Bruchideale: Da $(a) = IJ$, wissen wir, dass $[I][J] = [IJ] = [(a)] = [(1)]$, die Einheit in $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_k)$ ist. Wenn also $I = (b)$ ein Hauptbruchideal ist, dann ist $[I] = [(b)] = [(1)]$ auch die Einheit von $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$. Die Tatsache, dass $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$ eine Gruppe ist impliziert, dass auch $[J] = [(1)]$, was genau dann passiert, wenn $J = (c)$ ein Hauptbruchideal ist.

Für Hauptideale muss man noch zeigen, dass $c \in \mathfrak{o}_K$, wenn $a, b \in \mathfrak{o}_K$. Da aber bei Annahme $J$ ein Ideal ist, folgt es. □

*Aufgabe* 2 (1 Punkt). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$. Bestimme die Klassgruppe $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$.

**Lösung.** Wir erinnern uns an die Minkowskis Konstante

$$c = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \sqrt{|\Delta(\mathfrak{o}_K)|}.$$

Wir wissen, dass jedes Element in $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K) = \mathcal{I}_K^*/\mathcal{P}_K^*$ einen Repräsentanten Ideal mit Norm weniger als $c$ hat.

Als erstes berechnen wir die Diskriminante $\Delta(\mathfrak{o}_K)$. Es gilt

$$\Delta(\mathfrak{o}_K) = \det\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-2} \\ 1 & -\sqrt{-2} \end{pmatrix}^2 = (-2\sqrt{-2})^2 = 8.$$

Daher ist

$$\sqrt{|\Delta(\mathfrak{o}_K)|} = 2\sqrt{-2}.$$

Es ist offensichtlich, dass $s = 1$, da $\sqrt{-2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Daher ist

$$c = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \sqrt{\Delta} < 2.$$

Als solches $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$ nur einen Element haben, die Einheit, was uns

$$\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K) = 1,$$

die triviale Gruppe, gibt. □

*Aufgabe* 3 (2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, so dass für jede Primzahl $p \leq c$, wobei $c$ die Minkowski Konstante ist, jedes Maximalideal in der Zerlegung von $(p)$ ein Hauptideal ist.

Beweise, dass $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K) = 1$ ist. Also, dass $K$ ein Hauptidealring/Faktorring ist.

**Lösung.** Wir wissen, dass jedes Element in $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$, was bei Definition eine Äquivalenzklasse von Idealen ist, einen Repräsentanten Ideal $I$ mit Norm kleiner als $c$, die Minkowski Konstante, enthält.

Auf der anderen Seite ist jedes Ideal ein Produkt von Maximalidealen. Daher enthält jede Äquivalenzklasse einen Ideal $I = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k$, wobei die $\mathfrak{p}_i$ maximal sind und $\mathsf{N}(I) < c$. Die Multiplikativität der Norm besagt, dass

$$N(\mathfrak{p}_i) < c.$$

Als solches wird die Klassgruppe von Maximalidealen (bzw. deren Äquivalenzklassen) der Norm $< c$ erzeugt. Bei der Annahme ist jedes dieser Ideale ein Hauptideal. Als solches sind diese Äquivalent zu (1). Daher ist die gesamte Gruppe die Einheitsgruppe.

(Alternativ kann man hier auch dadurch argumentieren, dass das Produkt von Hauptidealen ein Hauptideal ist.) □

*Aufgabe* 4 (2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-10})$. Was ist $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$?

**Lösung.** Wir haben $\det \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-10} \\ 1 & -\sqrt{-10} \end{pmatrix} = -2\sqrt{-10}$ und $s = 1$, was uns

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^s \sqrt{\Delta(\mathfrak{o}_K)} < 4$$

liefert. Wir haben

$$x^2 + 10 \equiv x^2 \mod 2$$

was uns

$$(2) = \mathfrak{p}_2^2 = (2, \sqrt{-10})^2$$

liefert. Es gilt auch

$$x^2 + 10 \equiv x^2 + 1 \mod 3.$$

Da $x^2 + 1$ irreduzibel ist über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, ist (3) selber ein Maximalideal. Daher ist die Klassgruppe entweder die triviale Gruppe, oder die Gruppe mit 2 Elementen. Es bleibt also zu untersuchen, ob $\mathfrak{p}_2$ ein Hauptideal ist.

Sei $x \in \mathfrak{o}_K \simeq \mathbb{Z}[\sqrt{-10}]$. Dann ist $x = a + b\sqrt{-10}$ mit Norm $\mathsf{N}(x) = a^2 + 10b^2$. Es ist klar, dass

$$a^2 + 10b^2 = 2$$

keine Lösung über $\mathbb{Z}$ hat, woraus wir schließen können, dass $\mathfrak{p}_2$ kein Hauptideal ist. □

*Aufgabe* 5 (1 Punkt). Sei $K$ ein Zahlenkörper und $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl, so dass $p \nmid \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$. (Also, $p$ teilt die Klassgruppe nicht).

Sei $I$ ein Ideal von $\mathfrak{o}_K$, so dass $I^p = (\theta)$ ein Hauptideal ist. Beweise, dass $I$ ein Hauptideal ist.

**Lösung.** Dies folgt vom Satz von Lagrange, welches besagt, dass die Ordnung eines Elements, die Ordnung der Gruppe Teilt. - Also, wenn $G$ eine endliche Gruppe von Ordnung $n$ ist (also $n$ Elemente hat) und $g \in G$ ein Element von Ordnung $m$ ist (also, $g^m = 1$ und aus $g^i = 1$ folgt $i = 0$ oder $i \geq m$), dann gilt $m \mid n$.

Sei nun $G = \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$ unsere Klassgruppe und $g = \overline{I}$ die Äquivalenzklasse von $I$. Bei Annahme ist $I^p = (\theta)$ ein Hauptideal, daher $g^p = 1$ in der Klassgruppe. Da $p$ eine Primzahl ist, muss die Ordnung von $g$ entweder 1 oder $p$ sein. (Wenn es nicht klar ist, sollte man es selber versuchen zu begründen).

Wenn aber die Ordnung von $g$ die Primzahl $p$ wäre, so müsste $p$ die Ordnung von $G = \mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$ teilen. Bei Annahme tut es dies jedoch nicht. Daher muss die Ordnung von $g$ also 1 sein, was $g = 1$ impliziert. - Also ist $I$ ein Hauptideal. □

*Aufgabe* 6 (3 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-14})$.

i) [1 Teilpunkt] Beweise, dass jede Äquivalenzklasse von Idealen (unter der Äquivalenz $\mathrm{Cl} = \mathcal{I}_K^*/\mathcal{P}_K^*$) einen Ideal der Norm $\leq 4$ enthält. Des weiteren zeige, dass $(2) = \mathfrak{p}_2^2 = (2, \sqrt{-14})^2$ und $(3) = \mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3 = (3, 1+\sqrt{-14})(3, 1-\sqrt{-14})$.

ii) [1 Teilpunkt] Beweise, dass $(2-\sqrt{-14}) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3^2$.

iii) [1 Teilpunkt] Schlussfolgere, dass $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$ die zyklische Gruppe mit 4 Elementen ist.

**Lösung.** i) Wir haben

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-14} \\ 1 & -\sqrt{-14} \end{pmatrix} = -2\sqrt{-14}$$

und $s = 1$, was uns

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^s \sqrt{\Delta(\mathfrak{o}_K)} < 5$$

gibt. Daher enthält jede Äquivalenzklasse von Idealen in $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$ einen Ideal der Norm $\leq 4$.

Es gilt $\mathfrak{m}_\alpha = x^2 + 14 \equiv x^2 \mod 2$ und $\mathfrak{m}_\alpha \equiv x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \mod 3$, was uns

$$(2) = \mathfrak{p}_2^2 = (2, \sqrt{-14})^2$$

und

$$(3) = \mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3 = (3, \sqrt{-14}-1)(3, \sqrt{-14}+1)$$

gibt.

ii) Sei $a = 2 - \sqrt{-14}$. Es ist klar, dass $a \in \mathfrak{p}_2$ und $a \in \mathfrak{p}_3$. Als solches gilt $\mathfrak{p}_2 \mid (a)$ und $\mathfrak{p}3 \mid (a)$. Da $\mathfrak{p}_2 \neq \mathfrak{p}_3$ (Normen sind verschieden) und beide Maximal sind, folgt, dass $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \mid (a)$. Daher gibt es ein $\mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{o}_K$, so dass

$$(2-\sqrt{-14}) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{x}.$$

Wir haben $\mathsf{N}((a)) = |4+14| = 18$. Daher muss $\mathsf{N}(\mathfrak{x}) = 3$ gelten, woraus $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_3$ oder $\mathfrak{x} = \mathfrak{q}_3$ folgt, da diese die einzigen Ideale mit Norm 3 sind.

Wenn $\mathfrak{x} = \mathfrak{q}_3$, dann $(a) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3 = \mathfrak{p}_2(3)$, woraus $(3) \mid (a)$, also $a \in (3)$ folgt. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch. Daher muss $\mathfrak{x} = \mathfrak{p}_3$ sein. Also,

$$(a) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3^2.$$

iii) Wir wissen, dass die einzigen Elemente von $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$ die Äquivalenzklassen von $(1), \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ und $\mathfrak{q}_3$ sein kann. Als erstes bemerken wir, dass kein Element in $\mathfrak{o}_K$ die Norm 2 oder 3 hat. Daher sind $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ und $\mathfrak{q}_3$ alle unterschiedlich von $(1)$. Daher kann $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$ nur eines der folgenden Gruppen sein: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Da jedoch $(a) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3^2$ gilt

$$(1) \simeq \overline{\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3}^2,$$

wobei $\overline{\mathfrak{p}_i}$ die Äquivalenzklasse des Ideals in $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$ bezeichnet. Da $\mathfrak{p}_2^2 = (2)$ haben wir

$$\overline{\mathfrak{p}_2}^2 \simeq (1)$$

in $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K)$ was zusammen mit der obigen Gleichung

$$\overline{\mathfrak{p}_2} \simeq \overline{\mathfrak{p}_3}^2$$

ergibt. Da $\overline{\mathfrak{p}_2}$ ja Ordnung 2 hat (Quadrat davon ist die Einheit, ist aber selber nicht die Einheit), muss $\overline{\mathfrak{p}_3}$ Ordnung 4 haben. Daher muss die Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sein, da es die einzige Gruppe mit 4 Elemente ist, die ein Element der Ordnung 4 hat.

□

*Aufgabe* 7 (4 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{11})$. Zerlege die Ideale (2), (3) und (5)) in Maximalideale. Beweise, dass jedes der Maximalideal die in der Zerlegung von (2), (3) und (5) vorkommen Hauptideale sind. Schlussfolgere, dass $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K) = 1$ ist.

**Lösung.** Wir benutzen Dedekinds Primfaktorzerlegungssatz. Um $(2) \subseteq \mathfrak{o}_K$ (bzw. $(3), (5) \subseteq \mathfrak{o}_K$) zu zerlegen, müssen wir das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{11}$ modulo 2 (bzw. 3 und 5) zerlegen. Wir haben

$$\mathfrak{m}_\alpha = x^2 - 11 \equiv x^2 - 1 \equiv (x-1)^2 \mod 2,$$
$$\mathfrak{m}_\alpha \equiv x^2 + 1 \mod 3,$$

was irreduzibel ist und

$$\mathfrak{m}_\alpha \equiv x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \mod 5.$$

Daher gilt

$$(2) = \mathfrak{p}_2^2 = (2, \sqrt{11}+1)^2,$$
$$(3) = \mathfrak{p}_3$$

und

$$(5) = \mathfrak{p}_5\mathfrak{q}_5 = (5, \sqrt{11}-1)(5, \sqrt{11}+1).$$

Da $\mathfrak{p}_3$ selber ein Hauptideal ist, müssen wir also beweisen, dass $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_5$ und $\mathfrak{q}_5$ Hauptideale sind. Es ist klar, dass

$$\mathsf{N}(\mathfrak{p}_2) = 2, \mathsf{N}(\mathfrak{p}_5) = 5 \quad \text{und} \quad \mathsf{N}(\mathfrak{q}_5) = 5.$$

Als solches suchen wir nach Elementen mit der Norm 2 und 5, welches unsere Ideale erzeugen. Hier erinnern wir uns an die Tatsache, dass wenn $I \subseteq J$ und $\mathsf{N}(I) = \mathsf{N}(J)$, wir $I = J$ haben. Spezifisch suchen wir also nach Elementen der Norm 2, bzw. 5, welches in $\mathfrak{p}_2$ bzw. $\mathfrak{p}_5$ enthalten sind.

Sei $x = a + b\sqrt{11} \in \mathfrak{o}_K$. Dann ist $\mathsf{N}(x) = a^2 - 11b^2$. Daher suchen wir nach Paaren $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $|a^2 - 11b^2| = 2$, bzw. 5.

$\mathfrak{p}_2$: Man kann schnell sehen, dass $a = 3, b = 1$ so ein Paar ist. Wir wollen nun untersuchen, ob $\mathfrak{p}_2 = (3 + \sqrt{11})$. Es gilt,

$$3 + \sqrt{11} = 2 + 1 + \sqrt{11},$$

woraus $(3 + \sqrt{11}) \subseteq \mathfrak{p}_2$ folgt. Da $\mathsf{N}(\mathfrak{p}_2) = \mathsf{N}((3 + \sqrt{11}))$ haben wir auch eine Gleichheit. Per Hand können wir auch nachrechnen, dass

$$2 = (3 + \sqrt{11})(-3 + \sqrt{11}) \qquad 1 + \sqrt{11} = (3 + \sqrt{11})(4 - \sqrt{11}),$$

was die andere Seite impliziert. Dies ist jedoch nicht mehr nötig.

$\mathfrak{p}_5$ & $\mathfrak{q}_5$: Wir suchen nach $a, b$, so dass

$$|a^2 - 11b^2| = 5.$$

Direkte Kandidaten dafür sind $a = 4, b = \pm 1$. Wir betrachten $(4 + \sqrt{11})$ und $(4 - \sqrt{11})$. Es gilt

$$4 + \sqrt{11} = 5 - (1 - \sqrt{11})$$

was $(4 + \sqrt{11}) \subseteq \mathfrak{p}_5 = (5, \sqrt{11} - 1)$ impliziert. Gleichheit der Norm impliziert nun Gleichheit der Ideale. (Per Hand

$$5 = (4 + \sqrt{11})(4 - \sqrt{11}), 1 - \sqrt{11} = (4 + \sqrt{11})(3 - \sqrt{11})$$

was uns die Gleichheit

$$(4 + \sqrt{11}) = \mathfrak{p}_5$$

liefert). Gleichwie liefern die Gleichungen

$$5 - (1 + \sqrt{11}) = 4 - \sqrt{11}; \quad 5 = (4 - \sqrt{11})(4 + \sqrt{11}),\ 1 + \sqrt{11} = (4 - \sqrt{11})(3 + \sqrt{11}),$$

dass

$$(4 - \sqrt{11}) = \mathfrak{q}_5 = (5, \sqrt{11} + 1).$$

(Im allgemeinen ist es nicht einfach solche Paare zu klassifizieren. Wir können aber einfache Bemerkungen direkt machen. Z. B., aus $2 = |a^2 - 11b^2|$ können wir direkt schließen, dass $a^2 \equiv b^2 \mod 2$, also $a \equiv b \mod 2$ und dass $|a^2| \equiv 2 \mod 11$, daher $a \equiv 3$ oder $8 \mod 11$. Solche Beobachtungen sind natürlich öfters nicht ausreichend, aber können einige einfache Kandidaten ergeben.) □

*Aufgabe* 8 (5 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. Man darf annehmen, dass $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{5}]$ und die verschärfte Konstante

$$c = \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \frac{d!}{d^d}\sqrt{|\Delta(\mathfrak{o}_K)|}$$

benutzen, wobei $d$ der Grad der Erweiterung $[K : \mathbb{Q}]$ ist.

i) [1 Teilpunkt] Faktorisiere die Ideale $(2), (3)$ und $(5)$.

ii) [2 Teilpunkte] Beweise, dass alle Maximalideale die in der Faktorisierung von $(2), (3)$ und $(5)$ vorkommen Hauptideale sind und schlussfolgere, dass $\mathrm{Cl}(\mathfrak{o}_K) = 1$.

**Lösung.** Das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt[3]{5}$ ist $\mathfrak{m}_\alpha = x^3 - 5$. Um dies modulo $2, 3$ und $5$ zu faktorisieren setzen wir $-2, -1, 0, 1, 2$ ein und sehen, ob wir vielfache von $2, 3$ oder $5$ erhalten. Es gilt

| $x$ | $x^3 - 5$ |
|---|---|
| $-2$ | $-13$ |
| $-1$ | $-6 = -2 \cdot 3$ |
| $0$ | $-5$ |
| $1$ | $-4 = -2^2$ |
| $2$ | $3$ |

was folgendes besagt:

mod 2: Das einzige Faktor ist $x + 1$ modulo 2. Daher ist $x^3 - 5 \equiv (x + 1)^3$ oder $(x + 1)f(x)$, wobei $f(x)$ eine irreduzible Gleichung vom Grad 2 ist. Wir haben

$$x^3 - 5 \equiv x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1) \mod 2,$$

wobei $x^2 + x + 1$ irreduzibel ist. Dies gibt uns

$$(2) = \mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2 = (2, \alpha + 1)(2, \alpha^2 + \alpha + 1).$$

mod 3: Das einzige Faktor ist $x + 1$ modulo 3. Daher ist $x^3 - 5 \equiv (x + 1)^3$ oder $(x + 1)f(x)$, wobei $f(x)$ eine irreduzible Gleichung vom Grad 2 ist. Es gilt

$$x^3 - 5 \equiv (x + 1)(x^2 - x + 1) \mod 3,$$

mit $x^2 - x + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Dies gibt uns

$$(3) = \mathfrak{p}_3\mathfrak{q}_3 = (3, \alpha + 1)(3, \alpha^2 - \alpha + 1)$$

laut Dedekind.

mod 5: Hier ist es klar, dass

$$(5) = \mathfrak{p}_5^3 = (5, \alpha)^3.$$

Nun geht es darum zu beweisen, dass diese Maximalideale von einem einzigen Element erzeugt werden.

$\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_2$: Wir haben $\mathsf{N}(\mathfrak{p}_2) = 2$ und $\mathsf{N}(\mathfrak{q}_2) = 4$. Daher suchen wir nach Elementen der Norm 2 und 4. Wir haben

$$\mathsf{N}(1+\alpha) = 6 \quad \text{und} \quad \mathsf{N}(2-\alpha) = 3,$$

was uns

$$\mathsf{N}\left(\frac{1+\alpha}{2-\alpha}\right) = 2$$

liefert. Daher suchen wir nach $a, b, c$ mit

$$1+\alpha = (2-\alpha)(a+b\alpha+c\alpha^2),$$

was uns

$$\frac{1+\alpha}{2-\alpha} = 3+2\alpha+\alpha^2$$

liefert. Von

$$(3+2\alpha+\alpha^2) = \alpha(\alpha+1)+(\alpha+1)+2$$

wissen wir, dass $(3+2\alpha+\alpha^2) \subseteq (2, \alpha+1)$. Die Gleichheit der Norm besagt nun, dass die Ideale auch übereinstimmen. (Eine direkte Rechnung ist:

$$2 = (3+2\alpha+\alpha^2)(-1-\alpha+\alpha^2), \quad 1+\alpha = (2-\alpha)(3+2\alpha+\alpha^2)$$

wissen wir, dass $\mathfrak{p}_2 = (2, \alpha+1) = (3+2\alpha+\alpha^2)$).

Aufgabe 1 impliziert nun, dass auch $\mathfrak{q}_2$ ein Hauptideal ist.

$\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{q}_3$: Wir haben $\mathsf{N}(\mathfrak{p}_3) = 3$ und $\mathsf{N}(\mathfrak{q}_3) = 9$. Da $\mathsf{N}(2-\alpha) = 3$ und $(2-\alpha) \subseteq (3, \alpha+1)$ sind die Ideale also gleich. Vom Lemma wissen wir auch, dass $\mathfrak{q}_3$ ein Hauptideal sein muss.

$\mathfrak{p}_5$: Es ist $\mathfrak{p}_5 = (5, \alpha) = (\alpha)$, da $5 = \alpha^3$. Daher ist es ein Hauptideal.

Die Minkowski Konstante die wir hier benutzen ist

$$c = \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \frac{n!}{n^n}\sqrt{|\Delta(\mathfrak{o}_K)|} = \frac{2\cdot 3}{3^3}\sqrt{|\mathsf{N}(\mathfrak{m}'_\alpha(\alpha))|} = \frac{2}{9}\sqrt{\mathsf{N}(3\alpha^2)} = \frac{2}{9}\sqrt{27\cdot 25} \approx 5,77.$$

Da alle Maximalideale mit Norm $\leq 5$ Hauptideale sind, werden alle Ideale Hauptideale sein. □