Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 12

Aufgaben 12

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Faktorisiere folgende Ideale in $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ als Produkt von Maximalidealen:

i) (1 Teilpunkt) $(3) \subseteq \mathfrak{o}_K$,

ii) (1 Teilpunkt) $(5) \subseteq \mathfrak{o}_K$,

iii) (1 Teilpunkt) $(7) \subseteq \mathfrak{o}_K$.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$. Faktorisiere $(10) \subseteq \mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ als Produkt von Maximalidealen.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$. Faktorisiere folgende Ideale als Produkt von Maximalidealen:

i) (2 Teilpunkte) $(3) \subseteq \mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{3}]$

ii) (2 Teilpunkte) $(10) \subseteq \mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{3}]$

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei $d \not\equiv 1 \mod 4$ eine quadratfreie Zahl und p eine Primzahl, so dass $d \equiv a^2 \mod p$. Sein $\mathfrak{p} := (p, a + \sqrt{d}), \mathfrak{q} := (p, a - \sqrt{d}) \subseteq \mathbb{Z}(\sqrt{d})$.

i) (1 Teilpunkt) Beweise, dass $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Primideale sind.

ii) (1 Teilpunkt) Zeige, dass $\mathsf{N}(\mathfrak{p}) = \mathsf{N}(\mathfrak{q}) = p$.

iii) (1 Teilpunkt) Beweise, dass $(p) = \mathfrak{pq}$.

iv) (1 Teilpunkt) Zeige, dass $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ genau dann, wenn $p \mid 2d$.

Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $I \subseteq R$ ein Ideal. Dann bezeichnen wir mit I_S, dass Ideal (in S) erzeugt mit $f(I)$. Wenn f eine Einbettung ist, gilt $I_S = (is), i \in I, s \in S$, also das Ideal erzeugt mit allen Produkten is. Folgendes gilt im solchem Fall (was angenommen werden darf):

- $(IJ)_S = I_S J_S$
- $(I^n)_S = (I_S)^n$ und
- $(a)_L = (a)$ (wobei wir a in der rechten Seite als ein Element von S auffassen. Anders gesagt, Hauptideale bleiben Hauptideale und werden vom selben Element erzeugt).

Aufgabe 5 (3 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-13})$ und $I = (2, 1 + \sqrt{-13}) \subseteq \mathfrak{o}_K$.

i) (1 Teilpunkt) Beweise, dass $I^2 = (2)$.

ii) (1 Teilpunkt) Zeige, dass I kein Hauptideal ist.

iii) (1 Teilpunkt) Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-13}, \sqrt{2})$. Zeige, dass $I_{\mathfrak{o}_L} = (\sqrt{2}) \subseteq \mathfrak{o}_L$. - *Hierzu sagt man, dass man ein Ideal durch eine Erweiterung zu einem Hauptideal gemacht hat.*

Aufgabe 6 (3 Punkte). Sei $d \equiv 1 \mod 4$ und quadratfrei mit $d \neq 1$. Beweise, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ kein Hauptidealring ist.

Hinweis 1: Faktorisiere $d - 1$. Hinweis 2: Wir haben einen Element $r \in R$ prim genannt, wenn $(p) \subseteq R$ ein Primideal war. Was wissen wir über irreduzible und prim Elemente in einem Hauptidealbereich?

Aufgabe 7 (2 Punkt). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-6})$. Finde alle Ideale der Norm $4, 10$ und 15.