Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 11

Aufgaben 11

Aufgabe 1 (1 Punkt). Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_d\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathfrak{o}_K$, $a \in \mathfrak{o}_K$ und (a) das Hauptideal dazu. Beweise, dass $a\mathcal{B} = \{ab_1, \dots, ab_d\}$ eine Ganzheitsbasis von (a) ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Sei p eine Primzahl und $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{o}_K$ ein Primideal. Beweise, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

A. $\mathfrak{p} \mid p$, also $\mathfrak{p}$ liegt über p.

B. $p \in \mathfrak{p}$

C. $\mathsf{N}(\mathfrak{p})$ ist eine Potenz von p.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Berechne folgende Normen:

i) $\mathsf{N}((11, 2 + \sqrt{-7})^2)$

ii) $\mathsf{N}((8, 1 + \sqrt{-7})^2)$

Aufgabe 4 (3 Punkt). Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Berechne die Norm der Ideale

i) (1 Teilpunkt) $(2, \sqrt[3]{2})$

ii) (1 Teilpunkt) $(3, 1 + \sqrt[3]{2})$

iii) (1 Teilpunkt) $(2, 1 + \sqrt[3]{2})$

Aufgabe 5 (3 Punkte). Sei $[K : \mathbb{Q}] = d$ und sei $\alpha \in \mathfrak{o}_K$ mit $\mathsf{N}(\alpha) = a$.

i) (2 Teilpunkte) Beweise, dass $\mathsf{N}((a, \alpha)^d) = \alpha^d$.

ii) (1 Teilpunkt) Was ist $\mathsf{N}((a, \alpha))$?

Bemerkung 0.0.1. Mit $(A, B) = 1$ meinen wir, dass das schnitt aller Ideale die sowohl A wie auch B enthalten ganz $\mathfrak{o}_K$ ist. Anders gesagt: es gibt $a \in A, b \in B$, so dass $1 = a + b$.

Aufgabe 6 (2 Punkte). Sein $(0) \neq \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{o}_K$ Primideale mit $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$.

i) (1 Teilpunkt) Beweise, dass $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = (1)$ und

ii) (1 Teilpunkt) dass $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{pq}$.

Aufgabe 7 (2 Punkte). Sein $A, B, C \subseteq \mathfrak{o}_K$ Ideale, so dass $(A, B) = 1$.

i) (1 Teilpunkt) Beweise, dass wenn $A \mid BC$, dann $A \mid C$.

ii) (1 Teilpunkt) Beweise, dass wenn $A \mid C$, $B \mid C$, dann $AB \mid C$.

Aufgabe 8 (3 Punkte). Die Ringe $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ sind Hauptidealringe. (Dies darf man annehmen). Stelle folgende Ideale als Hauptideale dar: (Hinweis: Berechne die Norm der Ideale und finde Elemente β mit der entsprechenden Norm.)

i) (1 Teilpunkt) $(3, \sqrt{6})$,

ii) (1 Teilpunkt) $(5, 4 + \sqrt{6})$,

iii) (1 Teilpunkt) $(2, 1 + \sqrt{7})$.