Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 10

Aufgaben 10

Aufgabe 1 (1 Punkt). Zur Erinnerung, für einen Zahlenring $\mathfrak{o}_K$, bezeichnen wir mit $\mathcal{I}^*$ die Menge der Ideale von $\mathfrak{o}_K$ ungleich Null. Mit $\mathfrak{o}_K^*$ bezeichnen wir die Menge der Bruchideale ungleich Null. Beweise folgende Aussagen:

1. Die Menge $\mathcal{I}^*$ ist ein Monoid (unter dem Produkt);
2. Die Menge $\mathcal{I}_K^*$ ist ein Monoid (unter dem Produkt).

Aufgabe 2 (2 Punkte). Sei $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}$. Entscheide, mit Begründung, welche dieser Mengen ein Bruchideal definiert:

i) $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \left\{\frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}$

ii) $\mathbb{Z}_2 = \left\{\frac{n}{2^m}, n, m \in \mathbb{Z}\right\}$

iii) $\mathbb{Z}_{\langle 2\rangle} = \left\{\frac{n}{2m}, n, m \in \mathbb{Z}\right\}$

iv) $\mathbb{Z}_{(2)} = \left\{\frac{n}{2m+1}, n, m \in \mathbb{Z}\right\}$

Aufgabe 3 (4 Punkte). Berechne die Inverse der folgenden Ideale:

i) (1 Teilpunkt) $\mathfrak{a} = (2) \subseteq \mathfrak{o}_{\mathbb{Q}}$,

ii) (1 Teilpunkt) $\mathfrak{b} = (2) \subseteq \mathfrak{o}_K$, mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$,

iii) (1 Teilpunkt) $\mathfrak{c} = (\sqrt{3}) \subseteq \mathfrak{o}_K$, mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$,

iv) (1 Teilpunkt) $\mathfrak{d} = (2, \sqrt{3}) \subseteq \mathfrak{o}_K$, mit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$ mit Ganzheitsbasis $\{1, \sqrt{-6}\}$. Betrachte die Ideale $\mathfrak{a} = (2, \sqrt{6})$ und $\mathfrak{b} = (3, \sqrt{-6})$).

i) (1 Teilpunkt) Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ Maximalideale?

ii) (2 Teilpunkte) Berechne das Bruchideal $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$.

Die folgende Aufgabe ist recht schwer und das Stoff ist außerhalb der Grenzen/Interesse des Kurses! Es sollte wie eine "Sonderaufgabe" behandelt werden.

Ein Noetherscher Ring R heißt *Dedekindring*, wenn es ein Integritätsbereich ist und jedes Ideal eine Zerlegung in Primideale hat. Das heißt, wenn für jeden $\mathfrak{a} \subseteq R$, es Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, so dass

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n.$$

Diese Zerlegung wird dann eindeutig sein (dies kann Bewiesen werden). Für Dedekindringe kann man Bruchideale genau so wie für Zahlenringe einführen und die Bruchideale eines Dedekindringes bilden eine Gruppe unter der Multiplikation, mit $R = (1)$ als die Einheit.

Aufgabe 5 (5 Punkte). Sei R ein Dedekindring und $S \subseteq R$ ein Untermonoid.

i) (2 Teilpunkte) Beweise, dass die Lokalisation $S^{-1}R$ ein Dedekindring ist.

ii) (3 Teilpunkte) Sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Bruchideal von R.

ii a) Zeige, dass $S^{-1}\mathfrak{a}$ ein Bruchideal von $S^{-1}R$ ist.

ii) b) Zeige, dass die Abbildung $\mathfrak{a} \mapsto S^{-1}\mathfrak{a}$ einen Gruppenhomomorphismus zwischen den Bruchidealen von R und den Bruchidealen von $S^{-1}R$ definiert.