Algebraische Zahlentheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 1

Allgemeine Hinweise

Maximale Punktzahl die man in diesem Arbeitsblatt erwerben kann sind 10 Punkte. Wenn man Aufgaben wählt, die z.B., $2+3+3+3=11$ Punkte wert sind, werden trotzdem maximal 10 Punkte angerechnet.

Bei Unverständnissen, Fragen oder wenn Ihr Fehler findet, bitte an *ilia.pirashvili@math.uni-augsburg.de* wenden.

Abgabefrist ist bis einschließlich Freitag (28/10) um 10:15. Viel Glück und viel Erfolg.

Aufgaben 1

Aufgabe 1 (1 Punkt). Sei R ein Ring und $\mathbb{Z}$ das Ring der ganzen Zahlen. Zeige, dass es genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$ gibt.

Aufgabe 2 (5 Punkte (insgesamt)). Sei X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ die Menge der Teilmengen von X.

- (2 Teilpunkte) Zeige, dass

$$A + B := A \cup B \setminus A \cap B \quad \text{und} \quad AB := A \cap B$$

  eine Ringstruktur auf $\mathfrak{P}(X)$ definiert.

  - Überzeugt euch, dass für ein beliebiges Element A, $2A = 0$ in diesem Ring.

- (3 Teilpunkte) Ist es möglich, mithilfe von Teilmengen einer Menge X, einen Ring der Charakteristik 3 zu definieren?

Definition. Zur Erinnerung, ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ heißt *prim* wenn aus $ab \in \mathfrak{p}$ folgt $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$.

Aufgabe 3 (2 Punkt (insgesamt)). Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $I \subseteq S$ ein Ideal.

- (1 Teilpunkt) Beweis, dass das Uhrbild $f^{-1}(I) \subseteq R$ von I ein Ideal von R ist.
- (1 Teilpunkt) Sei $I = \mathfrak{p}$ zusätzlich prim. Zeige, dass $f^{-1}(\mathfrak{p})$ auch prim ist.

Aufgabe 4 (1 Punkt). Sei $f : R \to S$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und $I \subseteq R$ ein Ideal. Beweise, dass $f(I) \subseteq S$ ein Ideal von S ist.

Aufgabe 5 (1 Punkt). Sei $u \in R$ eine Einheit von R und $I \subseteq R$ ein Ideal. Zeige, dass

$$I = (u)I.$$

Aufgabe 6 (2 Punkte). Beweise direkt, dass $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 7 (2 Punkte). Sei $2 \leq p \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass das Ideal

$$(p, x) \subseteq \mathbb{Z}[X]$$

kein Hauptideal ist.

Aufgabe 8 (2 Punkte). Bestimme, ob das Ideal $(X^2+9X+18, X^3+9X^2-54) \subseteq \mathbb{Z}[X]$ ein Hauptideal ist.