Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 9

Aufgaben 9

Aufgabe 1 (5 Punkte). Beweise Proposition **??** aus der Vorlesung.

Beweis. Siehe das Vorlesungsskript. □

Aufgabe 2 (2 Punkte). Beweise, dass auch für den verallgemeinerten Fall

$$\chi_{V\otimes W} = \chi_V \chi_W$$

gilt.

Beweis. Sei V ein G-Modul und W ein H-Modul. Bei Definition ist die Wirkung von $G \times H$ auf $V \otimes W$ durch $(g,h)e_i \otimes f_j = ge_1 \otimes hf_j$. Sein also $g \in G$ und $h \in H$. Dann ist $\chi_{(g,h)}$ die Spur der Matrix, welches dem Endomorphismus $\gamma : V \otimes W \to V \otimes W$ entspricht, welches die Basiselemente $e_i \otimes f_i$ auf $ge_i \otimes hf_j$ sendet. Indem wir die Endomorphismen $V \to V$, $e_i \mapsto ge_i$ und $W \to W$, $f_i \mapsto hf_i$ mit α bzw. β bezeichnen, merken wir, dass $\gamma = \alpha \otimes \beta$. Korollar **??** (3.1.7) impliziert nun die Aussage. □

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei G eine Gruppe der Ordnung 12 mit der Charaktertafel

$\#$	1	2	2	1	3	3
$\overline{g} \in G_c$	1	a	b	c	d	e
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	x_1
χ_3	1	-1	1	-1	1	x_2
χ_4	1	-1	1	x_3	-1	1
χ_5	2	1	-1	-2	x_4	0
χ_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}.

Vervollständige es.

Lösung. Wir benutzen die Spalten und Zeilen Orthogonalitäts Sätze. Zuerst bemerken wir aber recht schnell, das $x_5 = 2$ (da $1+1+1+1+2^2+x_5^2 = 12$). Als nächstes suchen wir die Variablen x_6 und x_7 mithilfe der nun ganz bekannten ersten Spalte. Hierzu benutzen wir die Spaltenorthogonalität. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{6} \overline{\chi_i(1)}\chi_i(x) = 0, \quad \text{mit} \quad x = a, b,$$

was uns

$$1 + 1 - 1 - 1 + 2 + 2x_6 = 0, \quad 1 + 1 + 1 + 1 - 2 + 2x_7 = 0$$

und somit $x_6 = x_7 = -1$.

Gleichwie können wir auch die Zeilenorthogonalität

$$\sum_{g\in G} \overline{\chi_1(g)}\chi_i(g) = 0, \quad i = 2, 3, 4, 5$$

benutzen und erhalten

$$1+2+2+1-3+3x_1=0,\quad 1-2+2-1+3+3x_2=0\quad 1-2+2+x_3-1+1=0\quad 2+2-2-2+3x_4=0.$$

Daher, $x_1 = x_2 = x_3 = -1$ und $x_4 = 0$. Wir erinnern uns hier, dass χ_j auf konjugierte Elemente immer gleich ist und daher brauchen wir nur einen Elementen der Konjugationsklasse nehmen und es mit der Anzahl der Elemente in der Konjugationsklasse multiplizieren.

Nun benutzen wir wieder Spaltenorthogonalität um die verbleibenden 3 Variablen zu finden. Hierzu können wir sowohl die erste, zweite wie auch die dritte Spalte als die Hilfs- (bzw. bekannte) Spalte nehmen. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{6} \overline{\chi_i(b)}\chi_i(x) = 0, \quad \text{mit} \quad x = c, d, e.$$

Wir folgern nun

$$1+1-1-1+2-x_7=0,\quad 1-1+1-1+x_8=0,\quad 1-1-1+1-x_{10}=0,$$

und somit $x_7 = 2,\quad x_8 = x_{10} = 0$. Die ganze Tabelle ist nun

$\#$	1	2	2	1	3	3
$\overline{g} \in G_c$	1	a	b	c	d	e
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1
χ_5	2	1	-1	-2	0	0
χ_4	2	-1	-1	2	0	0.

Zur Interesse sei gesagt, dass dies die Tabelle von D_6 ist. □