# Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 8

## Aufgaben 8

*Aufgabe* 1 (3 Punkte). Sei $Q = \langle x, y \mid x^4 = 1,\ x^2 = y^2,\ yx = x^3y \rangle$ die Gruppe der Quaternionen (wie letzte Woche) und betrachte $H = \langle x \rangle$, die Untergruppe, welches durch $x$ erzeugt wird. Betrachte $G/H$ als eine $G$-Menge und sei $V$ die dazu korrespondierende Permutationsdarstellung.

i) Was ist die Dimension von $V$?

ii) Finde den Charakter von $V$.

iii) Ist $V$ irreduzibel?

*Lösung.* Wir merken direkt, dass $H \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und da $|Q| = 8$, folgt $|Q/H| = 2$, also muss $Q/H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, \overline{y} \mid \overline{y}^2 = 1\}$ sein. Die Wirkung ist nun durch $x \cdot \overline{y} = \overline{y}$ und $y \cdot \overline{y} = 1$ gegeben. Daher ist die Darstellung $\rho_x : G \to \mathrm{Gl}(\mathbb{C}[G/H])$ durch $\rho_x(x)(a + b\overline{y}) = a\overline{x} + b\overline{xy} = a + b\overline{y}$ und $\rho_x(y)(a + b\overline{y}) = a\overline{y} + b\overline{yy} = a\overline{y} + b$ gegeben, mit $a, b \in \mathbb{C}$. In Matrixform ist es

$$\rho_x(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A \quad \text{und } \rho_x(y) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

i) Da $G/H$ zwei Elemente hat, ist die Darstellung klar vom Grad 2.
ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_{\rho_x}(1) &= \dim(\mathbb{C}[G/H]) = 2 \\ \chi_{\rho_x}(x) &= \mathsf{p}(A) = 2 \\ \chi_{\rho_x}(x^2) &= \mathsf{p}(A^2) = \mathsf{p}(A) = 2 \\ \chi_{\rho_x}(y) &= \mathsf{p}(B) = 0 \\ \chi_{\rho_x}(xy) &= \mathsf{p}(AB) = \mathsf{p}(B) = 0, \end{aligned}$$

da $A = \mathsf{Id}$, siehe die Matrizen oben.

iii) Indem wir es mit der Tafel von letzter Woche vergleichen merken wir, dass es nicht mit der einzigen 2 dimensionalen irreduziblen Darstellung übereinstimmt. Es kann daher nicht irreduzibel sein. (Mehr als das, wir merken, dass es $\chi_1 + \chi_2$ sein muss.) □

*Aufgabe* 2 (6 Punkte). Für eine Gruppe $G$, betrachte die Darstellung $\rho_c : G \to \mathrm{Gl}(\mathbb{C}[G])$, gegeben durch $g \cdot x := g^{-1}xg$, mit $g \in G$ und $x \in \mathbb{C}[G]$. Aufgepasst, obwohl unsere Darstellung $\rho_c$ als Vektorraum mit der regulären Darstellung übereinstimmt, ist die Wirkung nun anders! Sei $\chi_c$ der dazugehörige Charakter.

i) Sei $x \in G \subseteq \mathbb{C}[G]$ und betrachte den Untervektorraum $V_x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq \mathbb{C}[G]$. Beweise, dass es eine Unterdarstellung ist.

ii) Beweise, dass für $g \in G$, $\chi_c(g) = |C_G(g)|$, wobei $C_G(g) = \{h \in G \mid hg = gh\}$ der Zentralisator ist.

iii) Sei $a \in C(G)$ eine Klassenfunktion. Bestimme das Hermitsche Produkt $\langle \alpha, \chi_c \rangle$.

*Lösung.* i) Es gilt $hV_x = \{h(gx) = (hg)x\} = V_x$.

ii) Wir benutzen die Tatsache, dass dies eine Permutationsdarstellung ist. Als solches ist $\chi_c(g) = |\mathsf{Fix}_G(E, g)|$, wobei $E = \mathbb{C}[G]$ mit der oben definierten Wirkung. Da $\mathsf{Fix}_G(E, g) = \{h | g \cdot h = g\}$, wobei $g \cdot h$ die gewünschte Wirkung ist, also $g \cdot h = g^{-1}hg$, folgt nun

$$\begin{aligned} \mathsf{Fix}_G(E, g) &= \{h | g \cdot h = g\} \\ &= \{h | g^{-1}hg = g\} \\ &= \{h | hg = gh\} \\ &= C_G(g). \end{aligned}$$

iii) Hier benutzen wir die Tatsache, dass es genau $\frac{|G|}{|C_G(g)|}$ zu $g$ konjugierte Elemente gibt. Darauf basierend gilt also

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \chi_c \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g)\chi_c(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|C_G(g)|} \alpha(g_i)\chi_c(g_i) \quad \text{wobei die } g_i's \text{ Repräsentanten von allen Konjugationsklassen sind} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} \frac{|G|}{|C_G(g)|} \alpha(g_i)C_G(g) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \alpha(g_i). \end{aligned}$$

□