Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 8

Aufgaben 8

Aufgabe 1 (3 Punkte). Sei $Q = \langle x, y \| x^4 = 1,\ x^2 = y^2,\ yx = x^3 y \rangle$ die Gruppe der Quaternionen (wie letzte Woche) und betrachte $H = \langle x \rangle$, die Untergruppe, welches durch x erzeugt wird. Betrachte G/H als eine G-Menge und sei V die dazu korrespondierende Permutationsdarstellung.

i) Was ist die Dimension von V?

ii) Finde den Charakter von V.

iii) Ist V irreduzibel?

Aufgabe 2 (6 Punkte). Für eine Gruppe G, betrachte die Darstellung $\rho_c : G \to \mathrm{Gl}(\mathbb{C}[G])$, gegeben durch $g \cdot x := g^{-1} x g$, mit $g \in G$ und $x \in \mathbb{C}[G]$. Aufgepasst, obwohl unsere Darstellung ρ_c als Vektorraum mit der regulären Darstellung übereinstimmt, ist die Wirkung nun anders! Sei χ_c der dazugehörige Charakter.

i) Sei $x \in G \subseteq \mathbb{C}[G]$ und betrachte den Untervektorraum $V_g = \{g \cdot x \| g \in G\} \subseteq \mathbb{C}[G]$. Beweise, dass es eine Unterdarstellung ist.

ii) Beweise, dass für $g \in G$, $\chi_c(g) = |C_G(g)|$, wobei $C_G(g) = \{h \in G \| hg = gh\}$ der Zentralisator ist.

iii) Sei $a \in C(G)$ eine Klassenfunktion. Bestimme das Hermitsche Produkt $\langle \alpha, \chi_c \rangle$.