Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 7

Aufgabe 1 (2 Punkte). Beweise, dass die Menge $\mathcal{C}(G)$ der Klassenfunktionen (wie in der Vorlesung definiert) eine $\mathbb{C}$-Algebra mit einem Hermitschen Produkt ist.

Aufgabe 2 (1 Punkt). Genau dann ist $\dim(V^{inv}) = \dim V$, wenn V eine triviale Darstellung von G ist.

Lösung. □

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei D_4 die Diedergruppe $D_4 = \langle x, y | x^4 = y^2 = xyxy = 1 \rangle$. Angenommen, $\rho_1, \cdots, \rho_4$ sind alle Darstellungen vom Grad 1 und ρ_4 ist eine Darstellung vom Grad 2. Vervollständige die folgende Tafel:

$\#$	1	1	2	2	2
$\overline{g} \in G_c$	1	x	x^2	y	xy
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	1
χ_5	?	?	?	?	?

Lösung. Sein die Unbekannten a, b, c, d, e in dieser Ordnung. Wir benutzen die Tatsache, dass die Charaktere eine orthonormale Basis formen: Es gilt also

$$\begin{aligned} \langle \chi_1, \chi_5 \rangle &= 0 \\ \langle \chi_2, \chi_5 \rangle &= 0 \\ \langle \chi_3, \chi_5 \rangle &= 0 \\ \langle \chi_4, \chi_5 \rangle &= 0 \\ \langle \chi_5, \chi_5 \rangle &= 1, \end{aligned}$$

was uns

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{8} \overline{\chi_1(g_i)} \chi_5(g_1) &= a + b + 2c + 2d + 2e \\ 0 = \sum_{i=1}^{8} \overline{\chi_2(g_i)} \chi_5(g_1) &= a + b + 2c - 2d - 2e \\ 0 = \sum_{i=1}^{8} \overline{\chi_3(g_i)} \chi_5(g_1) &= a - b + 2c + 2d - 2e \\ 0 = \sum_{i=1}^{8} \overline{\chi_4(g_i)} \chi_5(g_1) &= a - b + 2c - 2d + 2e \\ 8 = \sum_{i=1}^{8} \overline{\chi_5(g_i)} \chi_5(g_1) &= \overline{a}a + \overline{b}b + 2\overline{c}c + 2\overline{d}d + 2\overline{e}e \end{aligned}$$

gibt. Indem wir nun diese linearen Gleichungen auflösen, (die ersten vier sollten ausreichen), erhalten wir, dass $a = 2, b = 0, c = -2, d = 0, e = 0$. □

Aufgabe 4 (10^1 Punkte). Sei $Q = Q_8 = \langle x, y \| x^4 = 1,\ x^2 = y^2,\ yx = x^3y \rangle$ die Gruppe der Quaternionen. Unter Annahme der folgenden Formel $\sum_{i=1}^{s} d_i^2 = d$, stelle die Charaktertafel von Q_8 auf. Hier ist $d = |G|$ die Anzahl der Elemente der Gruppe und $d_1, \ldots, d_s$ sind die Dimensionen aller nicht isomorpher irreduzibler Darstellungen (sprich, s ist die Anzahl der nicht-isomorphen irreduziblen Darstellungen).

Lösung. Wir fangen an, die Gruppe auszuschreiben. Es gilt $Q_8 = \{1, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\}$. Dies mag zwar gleich aussehen zu D_4, aber die Verknüpfung untereinander ist anders: In Q_8 gilt $(xy)^2 = x(yx)y = x(x^3y)y = x^4y^2 = x^2$, jedoch ist $(xy)^2 = xyxy = 1$ in D_4. Man merkt schnell, dass die Konjugationsklassen $\{1, \{x^2\}, \{x, x^3\}, \{y, x^2y\}, \{xy, x^3y\}\}$ sind.

Wir wollen nun die eindimensionalen Charaktere finden: In anderen Worten, die Gruppenhomomorphismen von G nach $\mathbb{C}^*$. Dafür müssen wir nur angeben, wohin die Erzeuger (x, y) gehen. Da die Auswertungen $\chi_i(g) \in \mathbb{C}^*$ in einer kommutativen Gruppe landen, gibt die Gleichung $yx = x^3y$, die neue Gleichung

$$\chi_i(y)\chi_i(x) = \chi_i(x)^3\chi_i(y) \in \mathbb{C}^*,$$

was nach kürzen mit z und y, folgendes ergibt:

$$\chi_i(x)^2 = 1.$$

Es muss also $\chi_i(x) = \pm 1$ sein. Die Gleichung $x^2 = y^2$ gibt uns nun

$$\chi_i(x)^2 = 1 = \chi_i(y)^2,$$

was auch $\chi_i(y) = \pm 1$ gibt. Die vier Zuordnungen

$$\begin{aligned} \chi_1(x) = 1, &\quad \chi_1(y) = 1, \\ \chi_2(x) = 1, &\quad \chi_2(y) = -1, \\ \chi_3(x) = -1, &\quad \chi_3(y) = 1, \\ \chi_4(x) = -1, &\quad \chi_4(y) = -1 \end{aligned}$$

sind alle erlaubt und es gibt keine weitere.

Bei Charakteren vom Grad 1 ist es besonders einfach, die Auswertungen $\chi_i(g)$ zu berechnen. Da diese Gruppenhomomorphismen sind, gilt $\chi_i(\alpha\beta) = \chi_i(\alpha)\chi_i(\beta)$. Daher wissen wir schon diesen Teil der Tafel:

$\#$	1	1	2	2	2
$\overline{g} \in G_c$	1	x	x^2	y	xy
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Wir haben daher genau 4 verschiedene Darstellungen vom Grad 1. Die Formel $\sum_{i=1}^{s} d_i^2 = 8$ impliziert nun $s = 5$ und $d_5 = 2$. Es gibt also genau eine zusätzliche Darstellung, was Grad 2 hat. Spezifisch muss auch $\chi_5(1)$ die Dimension der Darstellung sein, was 2 ist. Wir können nun die Tafel zu ergänzen:

$\#$	1	1	2	2	2
$\overline{g} \in G_c$	1	x	x^2	y	xy
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	1
χ_5	2	?	?	?	?

[1] Man kann natürlich auch Teilpunkte erhalten. Es ist unter anderem in Ordnung, einige Teile aus Büchern oder dem Internet zu zitieren (dafür werden natürlich Punkte abgezogen). Zum Beispiel kann man einfach sagen "das sind die Konjugationsklassen", ohne es zu beweisen. Benotet werden nur die Teile, die beweisen werden.

Von der letzten Aufgabe wissen wir nun, dass die letzte Zeile $2, 0, -2, 0, 0$ sein muss. $\square$