Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 7

Aufgaben 7

Aufgabe 1 (2 Punkte). Beweise, dass die Menge $\mathcal{C}(G)$ der Klassenfunktionen (wie in der Vorlesung definiert) eine $\mathbb{C}$-Algebra mit einem Hermitschen Produkt ist.

Aufgabe 2 (1 Punkt). Genau dann ist $\dim(V^{inv}) = \dim V$, wenn V eine triviale Darstellung von G ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei D_4 die Diedergruppe $D_4 = \langle x, y | x^4 = y^2 = abab = 1 \rangle$. Angenommen, $\rho_1, \cdots, \rho_4$ sind alle Darstellungen vom Grad 1 und ρ_4 ist eine Darstellung vom Grad 2. Vervollständige die folgende Tafel:

$\#$	1	1	2	2	2
$\overline{g} \in G_c$	1	x	x^2	y	xy
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	1	-1
χ_1	1	-1	1	-1	1
χ_4	?	?	?	?	?

Aufgabe 4 (10[1] Punkte). Sei $Q = Q_8 = \langle x, y \| x^4 = 1,\ x^2 = y^2,\ yx = x^3 y \rangle$ die Gruppe der Quaternionen. Unter Annahme der folgenden Formel $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = d$, stelle die Charaktertafel von Q_8 auf. Hier ist $d = |G|$ die Anzahl der Elemente der Gruppe und $d_1, \ldots, d_n$ sind die Dimensionen aller nicht isomorpher irreduzibler Darstellungen (sprich, n ist die Anzahl der nicht-isomorphen irreduziblen Darstellungen).

[1] Man kann natürlich auch Teilpunkte erhalten. Es ist unter anderem in Ordnung, einige Teile aus Büchern oder dem Internet zu zitieren (dafür werden natürlich Punkte abgezogen). Zum Beispiel kann man einfach sagen "das sind die Konjugationsklassen", ohne es zu beweisen. Benotet werden nur die Teile, die beweisen werden.