Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 5

Aufgaben 5

Aufgabe 1 (3 Punkte). Betrachte die Darstellung $S_3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$$(\sigma, v) = (v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}),$$

wobei $\sigma \in S_3$ und $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$, wie in AB 3 (die Tatsache, dass die Wirkung rechts, nicht links ist, macht keinen Unterschied).

(a) Beweise, dass $U = \{(a, b, c) \| a + b + c = 0\} \subseteq V$ eine Unterdarstellung ist.

(b) Beweise, dass $W = \{(a, b, c) \| a = b = c\} \subseteq V$ eine Unterdarstellung ist.

(c) Beweise, dass $V = U \oplus W$.

Lösung. (a) & (b) Dass sowohl U wie auch W Untervektorräume sind, ist ein einfach zu überprüfen (lineare Algebra). Es gilt zu beweisen, dass diese unter der Wirkung von G abgeschlossen sind. Dies ist klar, da die Wirkung nur die "Namen" vertauscht (sprich a geht zu b etc.).

(c) Es gilt zu beweisen, dass $g(u, w) = (gu, gw)$ die gewünschte Darstellung von $V = \mathbb{C}^3$ ist. □

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $G = D_4 = \langle x, y \| x^4 = y^2 = 1, (yx)^2 = 1 \rangle$ und betrachte die Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$, gegeben durch

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \rho(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Finde eine Unterdarstellung $0 \neq U$ von $\mathbb{C}^3$.

(b) Erläutere (mit mindestens einer expliziten Rechnung), wie man Maschkes Satz anwenden kann, um eine weitere Unterdarstellung von V zu finden.

Lösung. (a) Sei $U = \{(0, b, c) \ | b, c \in \mathbb{C}\}$. Für jedes $u = (0, b, c) \in U$ gilt

$$\rho(x)u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix} \in U$$

und

$$\rho(y)u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -c \end{pmatrix} \in U.$$

Als solches ist U eine Unterdarstellung (denn x und y sind die Erzeuger der Gruppe. Wenn das Untervektorraum unter diesen Elementen erhalten bleibt, dann für alle).

(b) Sei $W = \{(a,0,0) \mid 0 \neq a \in C\}$. Es ist klar, als Vektorräume wir eine Isomorphie $\mathbb{C}^3 \simeq U \oplus W$ haben. Sei $p : \mathbb{C}^3 \to U \oplus W$ die Abbildung $p(a,b,c) = (0,b,c) \in U$. In Matrixform ist dies

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist klar, dass dies eine Projektion ist. Man wende nun das Lemma von Schur an und erhalte

$$p' := \mathbb{C}^3 \to U \oplus W$$

wie in der Vorlesung. In Matrixform wäre dies

$$\begin{aligned} 8P' &= \rho(1)P\rho(1) + \rho(x)P\rho(x)^3 + \rho(x)^2P\rho(x)^2 + \rho(x)^3P\rho(x) \\ &+ \rho(y)P\rho(y) + \rho(x)\rho(y)P\rho(y)\rho(x)^3 + \rho(x)^2\rho(y)P\rho(y)\rho(x)^2 + \rho(x)^3\rho(y)P\rho(y)\rho(x). \end{aligned}$$

Nun muss man nur noch den Kern der Abbildung finden und dies wird genau unsere Unterdarstellung W' sein, so dass $\mathbb{C}^3 = U \oplus W'$. □

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ die unendliche Zyklische Gruppe.

(a) Beweise, dass $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$, gegeben durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung von $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Finde eine 1-dimensionale Unterdarstellung U von $\mathbb{C}^2$.

(c) Beweise, dass es keine Unterdarstellung W geben kann, so dass $\mathbb{C}^2 = U \oplus W$.

Lösung. (a) Weil die Gruppe $\mathbb{Z}$ ist definiert jede Zuordnung des Erzeugers ein Gruppenhomomorphismus.

(b) Betrachte $U = \{(a,0) \mid a \in \mathbb{C}\}$. Es ist klar Eindimensional und es gilt $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$. Als solches ist es eine Unterdarstellung.

(c) Ein Untervektorraum W, mit $\mathbb{C}^2 = U \oplus W$, besagt, dass $U \cap W = \{0\}$. Sei $0 \neq w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$. Es gilt $\rho(t)w = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$. Da $\rho(t)$ ein Automorphismus ist, darf $0 \neq w$ nicht auf die Null. Daher muss $y \neq 0$, da wir sonst in U landen würden (also $U \cap W$ wäre nicht nur die Null).

Auf der anderen Seite wissen wir, dass $\dim(U) = 1$. Die Abbildung $\rho(t)_{|_W} : W \to W$ muss also Skalieren sein. Sprich, es muss gelten $\begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, was aber $\lambda = 1$ und somit zum Widerspruch führt. □