Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 5

Aufgaben 5

Aufgabe 1 (3 Punkte). Betrachte die Darstellung $S_3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$

$$(\sigma, v) = (v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}),$$

wobei $\sigma \in S_3$ und $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$, wie in AB 3 (die Tatsache, dass die Wirkung rechts, nicht links ist, macht keinen Unterschied).

(a) Beweise, dass $U = \{(a, b, c) \| a + b + c = 0\} \subseteq V$ eine Unterdarstellung ist.

(b) Beweise, dass $W = \{(a, b, c) \| a = b = c\} \subseteq V$ eine Unterdarstellung ist.

(c) Beweise, dass $V = U \oplus W$.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $G = D_4 = \langle x, y \| x^4 = y^2 = 1, (yx)^2 = 1 \rangle$ und betrachte die Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$, gegeben durch

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Finde eine Unterdarstellung U von $\mathbb{C}^3$.

(b) Erläutere (mit mindestens einer expliziten Rechnung), wie man Maschkes Satz anwenden kann, um eine weitere Unterdarstellung von V zu finden.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ die unendliche Zyklische Gruppe.

(a) Beweise, dass $\rho : \mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$, gegeben durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung von $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Finde eine 1-dimensionale Unterdarstellung U von $\mathbb{C}^2$.

(c) Beweise, dass es keine Unterdarstellung W geben kann, so dass $\mathbb{C}^2 = U \oplus W$.