Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 4

Aufgaben 4

Aufgabe 1 (1 Punkt). Beweise, dass die Menge der G-invarianten Elemente

$$V^{inv} = \{v \in V | gv = v, \text{ for all } g \in G\}$$

einer Darstellung $\rho : G \to V$ eine Unterdarstellung von G bilden.

Lösung. Sei $v^{inv} \in V^{inv}$ und $g \in G$. Es gilt $gv^{inv} = v^{inv} \in V^{inv}$ und wir sind fertig. □

Aufgabe 2 (2 Punkte). Sei $f : V \to W$ ein Darstellungshomomorphismus. Beweise folgenden Aussagen:

(a) Der Kern $\mathsf{Ker}(f) \subseteq V$ ist eine Unterdarstellung von V.

(b) Das Bild $\mathsf{Im}(f) \subseteq W$ ist ein Unterdarstellung von W.

Lösung. (a) Sei $v \in \mathsf{Ker}(f)$ und $g \in G$. Es gilt $f(gv) = gf(v) = g \cdot 0 = 0$ und daher ist auch $gv \in \mathsf{Ker}(f)$.

(b) Sein $w \in \mathsf{Im}(f)$, $g \in G$. Es gibt ein $v \in V$, so dass $w = f(v)$. Dann ist $f(gv) = gf(v) = gw$ und somit ist auch $gw \in \mathsf{Im}(f)$. □

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sein U, V und W Vektorräume. Beweise, dass es eine Isomorphie

$$\varphi : \mathsf{Hom}(U \otimes V, W) \to \mathsf{Hom}(U, \mathsf{Hom}(V, W))$$

gibt.

Lösung. Wir bauen die Isomorphie wie folgt auf: Sei $f \in \mathsf{Hom}(U \otimes V, W)$. Wir wollen $\varphi(f) \in \mathsf{Hom}(U, \mathsf{Hom}(V, W))$ erhalten, sprich, für jeden $u \in U$, soll $\varphi(f)(u) : V \to W$ eine Abbildung sein. Wir setzten $\varphi(f)(u)(v) := f(u \otimes v) \in W$. Da für u fixiert, die Abbildung $f(u \otimes -)$ K-Linear ist, landen wir in $\mathsf{Hom}(V, W)$ und da $f(- \otimes v)$ K-linear ist, ist auch φ K-linear.

Auf der anderen Seite, für ein $g : U \to \mathsf{Hom}(V, W)$. Wir definieren $\psi : \mathsf{Hom}(U, \mathsf{Hom}(V, W)) \to \mathsf{Hom}(U \otimes V, W)$ durch $\psi(g)(u \otimes v) := g(u)(v)$. Da $g(u) \in \mathsf{Hom}(V, W)$, können wir es auch v auswerten und dies macht also Sinn.

Es ist ein einfaches zu sehen, dass diese zwei Zuordnungen invers zueinander sind. □

Aufgabe 4 (3 Punkte). Beweise, dass es eine Isomorphie von Darstellungen $\varphi : V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}(V, W)$ gibt.

Lösung. Wir definieren $\varphi(f \otimes w)(v)$ durch $f(v)w$. Dies macht Sinn, da $f \in V^* = \mathsf{Hom}(V, K)$ können wir v darin einsetzten und da W ein K-Vektorraum ist, können wir es mit einem Elementen von K (was $f(v)$ ja ist) verknüpfen.

Man wähle sich nun Basen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ der Vektorräume V und W respektive.

Behauptung: Die Funktionen $E_{i,j} : V \to W$, gegeben durch $E_{i,j}(v) = v_i^*(v)w_j$ formen eine Basis von $\mathsf{Hom}(V, W)$, wobei $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ die Dualbasis von $\{v_1 \ldots, v_n\}$ ist.

Sei $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_{ij} = 0$, also für jeden $v \in V$, gilt

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i^*(v) \right) w_j = 0.$$

Da die w_j's eine Basis von W sind, muss für jeden $1 \leq j \leq m$ $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i^*(v) = 0$ gelten. Da nun auch die v_i^* eine Basis formen, muss gelten $\alpha_{ij} = 0$. Dies beweist lineare Unabhängigkeit. Aus Dimensionsgründen müssen die E_{ij} eine Basis formen.

Die Elemente $\{e_i^* \otimes w_j\}$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ sind eine Basis von $V^* \otimes W$ (bei Definition). Es gilt

$$\varphi(e_i^* \otimes w_j)(v) = e_i^*(v)w_j = E_{ij}(v)$$

bei Definition und somit haben wir eine Bijektion auf die Basiselemente gegeben. □