Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 4

Aufgaben 4

Aufgabe 1 (1 Punkt). Beweise, dass die Menge der G-invarianten Elemente

$$V^{inv} = \{v \in V | gv = v, \text{ for all } g \in G\}$$

einer Darstellung $\rho : G \to V$ eine Unterdarstellung von G bilden.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Sei $f : V \to W$ ein Darstellungshomomorphismus. Beweise folgenden Aussagen:

(a) Der Kern $\mathsf{Ker}(f) \subseteq V_1$ ist eine Unterdarstellung von V_1.

(b) Das Bild $\mathsf{Im}(f) \subseteq V_2$ ist ein Unterdarstellung von V_2.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sei $f : V \to W$ ein Darstellungshomomorphismus. Beweise folgenden Aussagen:

(a) Der Kern $\mathsf{Ker}(f) \subseteq V_1$ ist eine Unterdarstellung von V_1.

(b) Das Bild $\mathsf{Im}(f) \subseteq V_2$ ist ein Unterdarstellung von V_2.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sein U, V und W Vektorräume. Beweise, dass es eine Isomorphie

$$\varphi : \mathsf{Hom}(U \otimes V, W) \to \mathsf{Hom}(U, \mathsf{Hom}(V, W))$$

gibt.

Aufgabe 5 (2 Punkte). Beweise, dass es eine Darstellungsisomorphie $\mathsf{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$ gibt.

Beweis. □