Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 1

Aufgaben 3

Aufgabe 1 (1 Punkt). Beweise, dass das Inverse einer Darstellungshomomorphismus ein Darstellungshomomorphismus ist.

Lösung. Sein $\psi : G \to Gl(V)$ und $\phi : G \to Gl(W)$ isomorphe Darstellungen mit $f : V \to W$ eine Isomorphie. Für beliebige $g \in G$ haben wir einen kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi(g)} & V \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ W & \xrightarrow[\phi(g)]{} & W \end{array}$$

Als solches gilt $f \circ \psi(g) = \phi(g) \circ f$. Indem wir beide Seiten mit f^{-1} komponieren, zuerst von der Linken, dann von der rechten Seite, erhalten wir

$$\psi(g) \circ f^{-1} = f^{-1} \circ \phi(g).$$

Dies gibt uns einen kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi(g)} & V \\ {\scriptstyle f^{-1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^{-1}} \\ W & \xrightarrow[\phi(g)]{} & W, \end{array}$$

was die Isomorphie von f^{-1} impliziert. □

Aufgabe 2 (2 Punkte). Sei $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Wir definieren $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ und $\phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ durch

$$\varphi_{[m]} := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \end{pmatrix}$$

und

$$\phi_{[m]} := \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi m i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi m i}{n}} \end{pmatrix}$$

respektive.

(i) Beweise, dass φ und ϕ Darstellungen definieren.

(ii) Beweise, dass die Darstellungen φ und ϕ isomorph sind.

Lösung. (i) Es gilt

$$\phi_{[m]}\phi_{[k]} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi im}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi im}{n}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi ik}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi ik}{n}} = \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i(n+m)}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i(n+m)}{n}} \end{pmatrix} = \phi_{[m+k]}$$

Gleichwie gilt auch

$$\phi_{[m]}\phi_{[k]} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi im}{n}) & -\sin(\frac{2\pi im}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi im}{n}) & \cos(\frac{2\pi im}{n}) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi ik}{n}) & -\sin(\frac{2\pi ik}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi ik}{n}) & \cos(\frac{2\pi ik}{n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi i(m+k)}{n}) & -\sin(\frac{2\pi i(m+k)}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi i(m+k)}{n}) & \cos(\frac{2\pi i(m+k)}{n}) \end{pmatrix}$$

(ii) Sei $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi im}{n}) & -\sin(\frac{2\pi im}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi im}{n}) & \cos(\frac{2\pi im}{n}) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi im}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi im}{n}}. \end{pmatrix}$$

Da $det(P) = 2i \neq 0$ ist P invertierbar, was unsere Aussage abschließt. □

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $f : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus und $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ eine Darstellung.

(a) Sei ρ trivial. Beweise, dass auch $\rho \circ f$ trivial ist.

(b) Sei f surjektiv und $\rho \circ f$ trivial. Beweise, dass auch ρ trivial ist.

(c) Gib ein Beispiel von f und ρ, so dass $\rho \circ f$ trivial ist, aber ρ nicht trivial.

Lösung. (a) Bei Annahme gilt $\rho(g) = 1$, wobei 1 die Einheit von $Gl(n)$ bezeichnet. Indem wir $g = f(h)$ setzen, erhalten wir

$$(\rho \circ f)(h) = 1.$$

(b) Bei Annahme gilt $(\rho \circ f)(h) = 1$ für beliebige $h \in G$. Sei $g \in G$. Da f surjektiv ist gilt $g = f(h)$ für irgendein $h \in H$. Es folgt

$$\rho(g) = \rho(f(h)) = 1.$$

(c) Man nehme einen beliebigen H und sei $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die zyklische Gruppe mit zwei Elementen. Wir betrachten Darstellungen der Dimension 1 (sprich in $\mathrm{Gl}_1(K)$) und definieren $\rho(t) = -1$, $\rho(1) = 1$ und $f(h) = 1$ für alle $h \in G$. Es gilt $\rho \circ (h) = \rho(1) = 1$, aber ρ ist nicht trivial. □

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei $S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ die Symmetriegruppe der Menge $\{1, 2, 3\}$. Definiere die Abbildung $S_3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ durch

$$(\sigma, v) = (v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}),$$

wobei $\sigma \in S_3$ und $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$.

(a) Bewiese, dass die eine G-Modulstruktur definiert.

(b) Finde die dazu entsprechende Darstellung $G \to \mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$.

Lösung. Achtung! hier gab es einen kleinen Fehler (sorry). Die Wirkung war keine (links)Wirkung, wie wir es definiert hatten, sondern eine rechts Wirkung.

(a) Als solches schreiben wir die Wirkung etwas um: Wir identifizieren den Vektor (x_1, x_2, x_3) mit einer Funktion $x : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{C}$, welches 1 auf x_1, 2 auf x_2 und 3 auf x_3 absendet. Dann ist $x \cdot \sigma$ als die Komposition $x \circ \sigma$ definiert, wobei $\sigma \in S_3$ als eine Abbildung $\{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ aufgefasst wird. Es folgt

$$x \cdot (\sigma \circ \tau) = x \circ (\sigma \circ \tau) = (x \circ \sigma) \circ \tau = (x \cdot \sigma) \cdot \tau.$$

(b) Wie gewohnt sei $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ und $e_3 = (0,0,1)$. Es gilt

$$e_1 \cdot (12) = (0,1,0) = e_2,$$
$$e_2 \cdot (12) = (1,0,0) = e_1,$$
$$e_3 \cdot (12) = (0,0,1) = e_3.$$

Es folgt

$$\rho(12) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}$$

Gleich auch

$$\rho(13) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\rho(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Als nächstes bemerken wir

$$(x_1, x_2, x_3)(123) = (x_2, x_3, x_1).$$

Es folgt

$$e_1 \cdot (123) = (0,0,1) = e_3,$$
$$e_2 \cdot (123) = (1,0,0) = e_1,$$
$$e_3 \cdot (123) = (0,1,0) = e_2.$$

Als solches gilt

$$\rho(123) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uns

$$\rho(132) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0. \end{pmatrix}$$

□

Aufgabe 5 (2 Punkte). Sei $\varphi : G \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ eine Darstellung.

(a) Definiere $\psi : G \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ durch $\psi(g) := \overline{\varphi(g)}$, wobei $\overline{(-)}$ das Nehmen der komplex Konjugierte bezeichnet. Beweise, dass ψ eine Darstellung ist.

(b) Sei $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ eine ein-dimensionale Darstellung und definiere $\varphi^\chi : G \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ durch

$$\varphi^\chi(g) := \chi(g)\varphi(g).$$

Beweise, dass φ^χ eine Darstellung definiert. Des weiteren, gib ein Beispiel, wo φ und φ^χ nicht äquivalent (bzw. isomorph) sind.

Lösung. (a) Es gilt

$$\psi(gh) = \overline{\phi(gh)} = \overline{\phi(g)\phi(h)} = \overline{\phi(g)} \cdot \overline{\phi(h)} = \psi(g)\psi(h).$$

(b) Wir haben

$$\varphi^\chi(gh) = \chi(gh)\varphi(gh) = \chi(g)\chi(h)\varphi(g)\varphi(h) = \chi(g)\varphi(g)\chi(h)\varphi(h) = \varphi^\chi(g)\varphi^\chi(h).$$

Hier habe wir die Tatsache benutzt, dass $\chi(h)$ eine Zahl ist und somit mit der Matrix $\phi(g)$ kommutiert.

Für einen Gegenbeispiel, sein $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{1, t, t^2\}$, ω_3 eine primitive Wurzel aus 3 und gelte $\chi_t(z) = \varphi_t(z) = \omega_3 z$. Dann ist $\varphi^\chi(z) = \omega_3^2 z \neq \omega_3(z) = \varphi(z)$. □