Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 3

Aufgaben 3

Aufgabe 1 (1 Punkt). Beweise, dass das Inverse einer Darstellungshomomorphismus ein Darstellungshomomorphismus ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Sei $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Wir definieren $\varphi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ und $\phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ durch

$$\varphi_{[m]} := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi m}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \end{pmatrix}$$

und

$$\phi_{[m]} := \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi m i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi m i}{n}} \end{pmatrix}$$

respektive.

(i) Beweise, dass φ und ϕ Darstellungen definieren.

(ii) Beweise, dass die Darstellungen φ und ϕ isomorph sind.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Sei $f : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus und $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ eine Darstellung.

(a) Sei ρ : trivial. Beweise, dass auch $\rho \circ f$ trivial ist.

(b) Sei f surjektiv und $\rho \circ f$ trivial. Beweise, dass auch ρ trivial ist.

(c) Gib ein Beispiel von f und ρ, so dass $\rho \circ f$ trivial ist, aber ρ nicht trivial.

Aufgabe 4 (2 Punkte). Sei $S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ die Symmetriegruppe der Menge $\{1, 2, 3\}$. Definiere die Abbildung $S_3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ durch

$$(\sigma, v) = (v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)}),$$

wobei $\sigma \in S_3$ und $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3$.

(a) Bewiese, dass die eine G-Modulstruktur definiert.

(b) Finde die dazu entsprechende Darstellung $G \to \mathrm{Gl}_3(\mathbb{C})$.

Aufgabe 5 (2 Punkte). Sei $\varphi : G \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ eine Darstellung.

(a) Definiere $\psi : G \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ durch $\psi(g) := \overline{\varphi(g)}$, wobei $\overline{(-)}$ das Nehmen der komplex Konjugierte bezeichnet. Beweise, dass ψ eine Darstellung ist.

(b) Sei $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ eine ein-dimensionale Darstellung und definiere $\varphi^\chi : G \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ durch

$$\varphi^\chi(g) := \chi(g)\varphi(g).$$

Beweise, dass φ^χ eine Darstellung definiert. Des weiteren, gib ein Beispiel, wo φ und φ^χ nicht äquivalent (bzw. isomorph) sind.