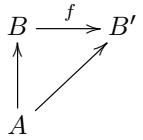
Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 2

Aufgaben 2

Aufgabe 1 (2 Punkte). Beweise, dass A-Algebren B mit A-Algebrahomomorphismen genau Ringhomomorphismen $A \to \mathcal{Z}(B)$ mit kommutierenden Dreiecke von Ringhomomorphismen



sind.

Lösung. Sei B ein A-Algebra. Wir definieren $\varphi : A \to \mathcal{Z}(B)$ durch $\varphi(a) \coloneqq a \cdot 1_B$, wobei wir mit $a \cdot 1_B$ die Wirkung (als Modul) von a auf die Einheit von B meinen. Da $1 \cdot m = m$ folgt $\varphi(1_A) = 1_B$. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(a+a') &= (a+a') \cdot 1_B \\ &= a \cdot 1_B + a' \cdot 1_B \\ &= \varphi(a) + \varphi(a') \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi(aa') &= (aa') \cdot (1_B) \\ &= a \cdot (a' \cdot 1_B) \\ &= (a \cdot (a' \cdot 1_B))1_B \\ &= {}^*(a' \cdot 1_B)(a \cdot 1_B) \\ &= \varphi(a)\varphi(a') \end{aligned}$$

wobei wir bei * die Eigenschaft $(ab)b' = b(ab')$, mit $a = a, b = (a' \cdot 1_B)$ und $b' = 1_B$ benutzt haben. Zuletzt wollen wir noch beweisen, dass wir im Zentrum fallen. Es gilt $\varphi(a)\varphi(a') = (a \cdot 1_B)(a' \cdot 1_B) =$

Sei wiederum ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to \mathcal{Z}(B)$ gegeben und sein $a \in A$ und $b, b' \in B$. Wir definieren eine A-Modul Struktur auf B durch $ab \coloneqq \varphi(a)b$. Dann gilt

$$(ab)b' \coloneqq (\varphi(a)b)b' = \varphi(a)(bb') =: a(bb')$$

und weil $\varphi(A) \subseteq \mathcal{Z}(B)$, bei Definition, gilt

$$(ab)b' \coloneqq (\varphi(a)b)b' = (b\varphi(a))b' = b(\varphi(a)b') \coloneqq b(ab').$$

Bei Morphismen definieren wir die A-Algebrahomomorphismen einfach als kommutierende Dreiecke, wie in der Aufgabe. □

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei R ein kommutatives Ring, G eine Gruppe und E eine G-Menge.

(i) Wir haben zwei Konstruktionen kennengelernt um den Gruppenring $R[G]$ zu erhalten. Beweise, dass diese tatsächlich miteinander übereinstimmen. (Lemma **??**.)

(ii) Wir haben zwei Konstruktionen kennengelernt um den $R[G]$-Modul $R[E]$ zu erhalten. Beweise, dass diese tatsächlich miteinander übereinstimmen. (Lemma **??**.)

Lösung. (i) Sei $R[G] = \{f : G \to R \mid f(g) = 0 \text{ für fast alle } g \in G\}$. Die Menge der Abbildungen

$$\delta_g(h) := \begin{cases} 1 & g = h \\ 0 & g \neq h \end{cases}$$

definiert eine R-Basis: Es gilt $f = \sum_{g\in G} f(g)\delta_g$ für jeden $f \in R[G]$ und aus $\sum_{g\in G} r_g\delta_g = \sum_{g\in G} s_g\delta_g$ folgt $\sum_{g\in G}(r_g - s_g)\delta_g = 0$. Ausgewertet an einem beliebigen $h \in G$ gibt dies uns $0 = \sum_{g\in G}(r_g - s_g)\delta_g(h) = r_h - s_h$, was uns $r_h = s_h$ gibt. Da dies für beliebige $h \in G$ gilt, folgt somit $r_g = s_g \ \forall g \in G$ und wir haben auch lineare Unabhängigkeit bewiesen. Als solches ist $R[G] \simeq R^d$. Dass $d = \#|G|$ ist klar, von der Anzahl der δ_g's.

Es gilt noch zu beweisen, dass das Produkt richtig definiert ist: Da die δ_g's eine Basis formen, reicht es aus, dies auf diese Funktionen zu überprüfen (Distributivität wird dann den allgemeinen Fall geben). Da $\delta_g\delta_h(x) = \sum_{yz=x} \delta_g(y)\delta_h(z) = \delta_{gh}(x)$, also $\delta_g\delta_h = \delta_{gh}$, folgt

$$(a_1\delta_{g_1} + a_2\delta_{g_2} + \cdots)(b_1\delta_{g_1} + b_2\delta_{g_2} + \cdots) = (a_1b_1\delta g_1g_2 + \cdots),$$

wie gewünscht.

Auf der anderen Seite, haben wir eine Basis $\mathcal{B} = \{B_g\}_{g\in G}$, indexiert durch die Gruppenelemente. Als solches können wir jedes Element unseres Ringes als eine endliche Summe

$$r = a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n$$

schreiben, wobei wir B_g mit g identifizieren, um die Notation einfacher zu halten. Wir definieren eine Abbildung $f_r : G \to R$ durch $f_r(g) := a_g$, wobei a_g das Koeffizient von b (bzw. B_g) bei der Auflösung von r in die Basiselemente ist.

Es ist klar, dass dies eine Abbildung ist, wo fast alle Werte $f(g)$ Null sind, da wir nur endliche Summen nehmen. Dass die Addition nun Punktweise gegeben ist, ist klar. Da wir schon argumentiert haben, dass $f = \sum_{g\in G} f(g)\delta_g$. Es gilt also nur noch zu beweisen, dass

$$(\delta_g\delta_h)(x) = \sum_{yz=x} \delta_g(y)\delta_h(z) = \delta_{gh}(x).$$

Da δ_g zum Element $0 + 1 \cdot B_g + 0 = B_g$ korrespondiert haben wir

$$(\delta_g\delta_h) = B_gB_h = B_{gh},$$

denn das Produkt der Basiselemente wurde so definiert. Damit sind wir fertig. □

Aufgabe 3 (1 Punkt). Beweise, dass eine Wirkung genau dann treu ist, wenn das einzige Element $g \in G$, welches für alle $e \in E$ die Gleichung $ge = e$ erfüllt, das triviale Element $g = 1$ ist.

Lösung. Sei eine Wirkung $\Phi : G \to S_G$ treu. Dies ist Äquivalent zu sagen, dass $\Phi(g) = 1$, genau dann wenn $g = 1$. Aber $\Phi(g) = 1 = \Phi(1)$ bedeutet nichts anderes, als dass $ge = e = 1 \cdot e$ für alle $e \in E$. □

Aufgabe 4 (Der Satz von Cayley — 2 Punkte). Beweise, dass jede Gruppe G eine Untergruppe von S_G ist.

Lösung. Wir definieren eine Wirkung $G \to S_G$ durch $g \mapsto l_g$, wobei $l_g : G \to G$ die Abbildung $h \mapsto gh$ ist (hier ist $E = G$). Es ist nun klar, dass das einzige Element $g \in G$, welches $ge = e$ für alle $e \in G$ erfüllt $g = 1$ ist. Daher ist die Wirkung treu und somit ist die Abbildung $G \to S_G$ injektiv. □