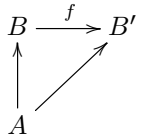
Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 2

Aufgaben 2

Aufgabe 1 (2 Punkte). Beweise, dass A-Algebren B mit A-Algebrahomomorphismen genau Ringhomomorphismen $A \to \mathcal{Z}(B)$ mit kommutierenden Dreiecke von Ringhomomorphismen



sind.

Aufgabe 2 (1 Punkt). Beweise, dass das Inverse eines Isomorphismus von Darstellungen wieder ein Homomorphismus von Darstellungen ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei R ein kommutatives Ring, G eine Gruppe und E eine G-Menge.

(i) Wir haben zwei Konstruktionen kennengelernt um den Gruppenring $R[G]$ zu erhalten. Beweise, dass diese tatsächlich miteinander übereinstimmen. (Lemma **??**.)

(ii) Wir haben zwei Konstruktionen kennengelernt um den $R[G]$-Modul $R[E]$ zu erhalten. Beweise, dass diese tatsächlich miteinander übereinstimmen. (Lemma **??**.)

Aufgabe 4 (1 Punkt). Beweise, dass die Menge der G-invarianten Elemente

$$V^{inv} = \{v \in V | gv = v, \text{ for all } g \in G\}$$

einer Darstellung $\rho : G \to V$ eine Unterdarstellung von G bilden.

Aufgabe 5 (2 Punkte). Sei $f : V \to W$ ein Darstellungshomomorphismus. Beweise folgenden Aussagen:

(a) Der Kern $\mathsf{Ker}(f) \subseteq V_1$ ist eine Unterdarstellung von V_1.

(b) Das Bild $\mathsf{Im}(f) \subseteq V_2$ ist ein Unterdarstellung von V_2.

Aufgabe 6 (1 Punkt). Beweise, dass eine Wirkung genau dann treu ist, wenn das einzige Element $g \in G$, welches für alle $e \in E$ die Gleichung $ge = e$ erfüllt, das triviale Element $g = 1$ ist.

Aufgabe 7 (Der Satz von Cayley — 2 Punkte). Beweise, dass jede Gruppe G eine Untergruppe von S_G ist.