Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 1

Aufgaben 1

Aufgabe 1 (1 Punkt). Sei $\alpha : V \to V$ eine K-lineare Abbildung von einem K-Vektorraum V in sich selbst, so dass es ein Inverses hat: Sprich eine Abbildung $\alpha^{-1} : V \to V$ existiert, mit $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = \mathsf{Id}$. Beweise, dass α^{-1} K-linear ist.

Lösung. Da α, bei Annahme, K-linear ist, gilt

$$\begin{aligned} \alpha\big(\alpha^{-1}(ka+k'b) - k\alpha^{-1}(a) - k'\alpha^{-1}(b)\big) &= \alpha\circ\alpha^{-1}(ka+k'b) - k\alpha\circ\alpha^{-1}(a) - k'\alpha\circ\alpha^{-1}(b) \\ &= ka + k'b - ka - k'b \\ &= 0, \end{aligned}$$

woraus $\alpha^{-1}(ka+k'b) - k\alpha^{-1}(a) - k'\alpha^{-1}(b) = 0$, da α eine Bijektion und daher injektiv ist. Dies ist aber Äquivalent zu $\alpha^{-1}(ka+k'b) = k\alpha^{-1}(a) + k'\alpha^{-1}(b)$, was K-Linearität bedeutet. □

Aufgabe 2 (2 Punkte). Beweise, dass es Äquivalent ist zu sagen, dass wir ein Ringhomomorphismus $A \to \mathsf{End}(M)$ haben, wobei $\mathsf{End}(M)$ das (nicht zwangsweise kommutative) Ring der Gruppenendomorphismen von M bezeichnet.

Lösung. Man habe ein A-Modul (wie in Definition **??**). Wir definieren die Abbildung $A \to \mathsf{End}(M)$ durch $a \mapsto l_a$, wobei $l_a : M \to M_a$ durch $m \mapsto am$ definiert ist. Dies (l_m) ist immer eine A-lineare Abbildung. Es ist ein einfaches zu zeigen, dass die Kollektion auch wirklich ein Ringhomomorphismus definiert.

Auf der anderen Seite, sei $\psi : A \to \mathsf{End}(M)$ ein Ringhomomorphismus. Wir definieren die Abbildung $\phi : A \times M \to M$ durch $(a,m) \mapsto (\psi(a))(m)$. Diese Konstruktionen sind Invers zu einander. □

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sein M_1, M_2, M_3 A-Module, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathsf{Hom}_A(M_1, M_2)$ und $\varphi_3 \in \mathsf{Hom}_A(M_2, M_3)$. Beweise folgende Aussagen:

(i) Mit $(a\varphi_1)(m) := a\varphi_1(m)$ und $(\varphi_1+\varphi_2)(m) := \varphi_1(m)+\varphi_2(m)$ wird die Menge $\mathsf{Hom}_A(M_1, M_2)$ zu einem A-Modul. (Hier wird die Kommutativität von A benötigt.)

(ii) Die Komposition von A-linearen Abbildungen ist wieder A-linear: Sprich, $\varphi_3 \circ \varphi_1 \in \mathsf{Hom}(M_1, M_3)$.

Lösung. (i) Als erstes gilt zu überprüfen, dass wir tatsächlich Modulhomomorphismen bekommen, sprich $(\varphi_1+\varphi_2)(m_1+m_2) = (\varphi_1+\varphi_2)(m_1)+(\varphi_1+\varphi_2)(m_2)$ und $(a\varphi_1)(bm) = b(a\varphi_1)(m)$. Die erste Gleichung ist klar, da die Summe sich mit der Summe verträgt und kommutativ ist: Es gilt

$$\begin{aligned} (\varphi_1+\varphi_2)(m_1+m_2) &= \varphi_1(m_1+m_2) + \varphi_2(m_1+m_2) \\ &= \varphi_1(m_1) + \varphi_1(m_2) + \varphi_2(m_1) + \varphi_2(m_2) \\ &= \varphi_1(m_1) + \varphi_2(m_1) + \varphi_1(m_2) + \varphi_2(m_2) \\ &= (\varphi_1+\varphi_2)(m_1) + (\varphi_1+\varphi_2)(m_2). \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung wird die Kommutativität benötigt:

$$\begin{aligned}(a\varphi_1)(bm) &= a\varphi_1(bm) && (1)\\ &= ab\varphi_1(m) && (2)\\ &= ba(\varphi_1)(m) && (3)\\ &= b(a\varphi_1)(m). && (4)\end{aligned}$$

Nun wollen wir zeigen, dass dies auch ein A-Modul wird. Es gilt die Eigenschaften

(a) $a(\varphi_1+\varphi_2) = a\varphi_1 + a\varphi_2$

(b) $(a_1+a_2)\varphi = a_1\varphi + a_2\varphi$

(c) $(a_1a_2)\varphi = a_1(a_2\varphi)$

(d) $1\cdot\varphi = \varphi$

zu überprüfen. Da die Gleichungen genau dann gelten, wenn sie für alle $m \in M$ gelten, überprüfen wir sie Punktweise: Es gilt

(a) $a(\varphi_1+\varphi_2)(m) = a[(\varphi_1+\varphi_2)(m)] = a[\varphi_1(m)+\varphi_2(m)] = a\varphi_1(m)+a\varphi_2(m)$, was den ersten Teil abschließt.

(b) Es gilt $((a_1+a_2)\varphi)(m) = (a_1+a_2)\varphi(m) = \varphi((a_1+a_2)m) = \varphi(a_1m+a_2m) = \varphi(a_1m) + \varphi(a_2m) = a_1\varphi(m) + a_2\varphi(m)$. Hier haben wir die A-Linearität von φ benutzt.

(c) $((a_1a_2)\varphi)(m) = (a_1a_2)\varphi(m) = \varphi((a_1a_2)m) = a_1\varphi(a_2m) = a_1(a_2\varphi(m)) = (a_1(a_2\varphi))(m)$.

(d) $(1\cdot\varphi)(m) = 1\cdot\varphi(m) = \varphi(m)$.

(ii) Es gilt $\varphi_3(\varphi_1(m+m')) = \varphi_3(\varphi_1(m)+\varphi_1(m'))) = \varphi_3(\varphi_1(m))+\varphi_3(\varphi_1(m'))$ und $\varphi_3(\varphi_1(am)) = \varphi_3(a\varphi_1(m)) = a\varphi_3\varphi_1(m)$.

□

Aufgabe 4 (1 Punkt). Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Zeige, dass die Faktorgruppe M/N durch $a(m+N) := am+N$ zu einem A-Modul wird und die natürliche Projektion $\pi : M \to M/N$ A-linear ist.

Lösung. Es gilt wieder die vier Eigenschaften zu überprüfen:
(i) $a(m_1+m_2+N) = a(m_1+m_2)+N = am_1+am_2+N$.
(ii) $(a_1+a_2)(m+N) = a_1(m+N)+a_2(m+N) = a_1m+a_1N+a_2m+a_2N = a_1m+N+a_2m+N = a_1m+a_2m+N$.
(iii) $(a_1a_2)(m+N) = (a_1a_2)m+(a_1a_2)N = (a_1a_2)m+N = a_1(a_2m))+N$.
(iv) $1\cdot(m+N) = 1\cdot m + a\cdot N = m+N$.
Es gibt noch zu beweisen, dass die Projektion auch eine A-lineare Abbildung ist. □

Aufgabe 5 (2 Punkte). Sei $\varphi : M \to N$ eine A-lineare Abbildung. Beweise folgende Aussagen:

(i) Der *Kern* $\mathsf{Ker}(\varphi) := \{m \in M \| \varphi(m) = 0\} \subseteq M$ ist ein Untermodul von M.

(ii) Das *Bild* $\mathsf{Im}(\varphi) := \{n \in N \| \exists m \in M \text{ mit } \varphi(m) = n\} \subseteq N$ ist ein Untermodul von N.

(ii) Der *Kokern* $\mathsf{Koker}(\varphi) := N/\mathsf{Im}(\varphi)$ ist ein Faktormodul von N.

Lösung. Das alle drei Untergruppen sind, ist klar. Es gilt zu beweisen, dass sie bezüglich dem Produkt von A abgeschlossen sind. (i) Sei $m \in \mathsf{Ker}(\varphi)$, sprich $\varphi(m) = 0$. Es gilt $\varphi(am) = a\varphi(m) = a\cdot 0 = 0$.
(ii) Sei $m \in \mathsf{Im}(\varphi)$, also, es gibt ein $n \in N$, so dass $\varphi(n) = m$. Dann gilt $\varphi(an) = a\varphi(n) = am$ und somit ist auch $am \in \mathsf{Im}(\varphi)$.
(iii) Folgt direkt von Teil (ii) dieses Lemmas und Lemma **??**. □

Aufgabe 6 (2 Punkte). Beweise, dass für $A = \mathbb{Z}$ das Ring der ganzen Zahlen, die Module und deren Homomorphismen genau Abelsche Gruppen und Gruppenhomomorphismen sind.

Lösung. Wir wissen (sieh algebraische Zahlentheorie), dass es genau ein Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$, für ein beliebiges Ring R gibt, spezifisch auch genau einen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathsf{End}_A(M)$ gibt und daher auch genau eine Modulstruktur auf jeder abelschen Gruppe M. Als solches sind Abelsche Gruppen und $\mathbb{Z}$-Module das selbe. Bei Homomorphismen kann man es direkt überprüfen. □