Darstellungstheorie: [MTH-1483]

Ilia Pirashvili

Arbeitsblatt 1

Aufgaben 1

Aufgabe 1 (1 Punkt). Sei $\alpha : V \to V$ eine K-lineare Abbildung von einem K-Vektorraum V in sich selbst, so dass es ein Inverses hat: Sprich eine Abbildung $\alpha^{-1} : V \to V$ existiert, mit $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = \mathsf{Id}$. Beweise, dass α^{-1} K-linear ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte). Beweise, dass es Äquivalent ist zu sagen, dass wir ein Ringhomomorphismus $A \to \mathsf{End}(M)$ haben, wobei $\mathsf{End}(M)$ das (nicht zwangsweise kommutative) Ring der Gruppenendomorphismen von M bezeichnet.

Aufgabe 3 (2 Punkte). Sein M_1, M_2, M_3 A-Module, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathsf{Hom}_A(M_1, M_2)$ und $\varphi_3 \in \mathsf{Hom}_A(M_2, M_3)$. Beweise folgende Aussagen:

(i) Mit $(a\varphi_1)(m) := a\varphi_1(m)$ und $(\varphi_1+\varphi_2)(m) := \varphi_1(m)+\varphi_2(m)$ wird die Menge $\mathsf{Hom}_A(M_1, M_2)$ zu einem A-Modul. (Hier wird die Kommutativität von A benötigt.)

(ii) Die Komposition von A-linearen Abbildungen ist wieder A-linear: Sprich, $\varphi_3 \circ \varphi_1 \in \mathsf{Hom}(M_1, M_3)$.

Aufgabe 4 (1 Punkt). Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul. Zeige, dass die Faktorgruppe M/N durch $a(m+N) := am+N$ zu einem A-Modul wird und die natürliche Projektion $\pi : M \to M/N$ A-linear ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte). Sei $\varphi : M \to N$ eine A-lineare Abbildung. Beweise folgende Aussagen:

(i) Der *Kern* $\mathsf{Ker}(\varphi) := \{m \in M \| \varphi(m) = 0\} \subseteq M$ ist ein Untermodul von M.

(ii) Das *Bild* $\mathsf{Im}(\varphi) := \{n \in N \| \exists m \in M \text{ mit } \varphi(m) = n\} \subseteq N$ ist ein Untermodul von N.

(ii) Der *Kokern* $\mathsf{Koker}(\varphi) := N/\mathsf{Im}(\varphi)$ ist ein Faktormodul von N.

Aufgabe 6 (2 Punkte). Beweise, dass für $A = \mathbb{Z}$ das Ring der ganzen Zahlen, die Module und deren Homomorphismen genau Abelsche Gruppen und Gruppenhomomorphismen sind.