Darstellungstheorie: [MTH-1483]
Vorlesungsskript

Ilia Pirashvili

SS 2022
Universität Augsburg

Inhaltsverzeichnis

0 Motivation **3**
0.1 Dedekind's Problem . . . 3
0.1.1 Die Ursprüngliche Frage (aus der algebraischen Zahlentheorie) . . . 3
0.1.2 Als Frage der Gruppentheorie . . . 3
0.2 Der Abelsche Fall . . . 4
0.2.1 Einige Beispiele . . . 4
0.2.2 Der allgemeine Abelsche Fall . . . 5
0.3 Der Nicht-Abelsche Fall . . . 6

1 Von G-Mengen zu $K[G]$-Modulen **9**
1.1 Vorläufige Ergebnisse aus der linearen Algebra . . . 9
1.1.1 $\mathrm{Gl}(V)$ und Gl_n: Vektorraumhomomorphismen und Matrizen . . . 9
1.2 Module . . . 10
1.2.1 G-Mengen . . . 13
1.2.2 Das Gruppenring $R[G]$ . . . 16
1.2.3 $K[G]$-Module . . . 16

2 Definition und erste Resultate **17**
2.1 Zwei Äquivalente Definitionen . . . 17
2.1.1 Lineare Darstellung einer Gruppe . . . 17
2.1.2 G-Modul . . . 18
2.1.3 Äquivalenz zwischen G-Modulen und Darstellungen . . . 19
2.1.4 Die Zyklischen Gruppen . . . 21
2.2 Neue Darstellungen durch Alte . . . 22
2.2.1 Der Bild und das Kern . . . 23
2.2.2 Die direkte Summe . . . 23
2.2.3 Das Tensorprodukt . . . 24
2.2.4 Die Homomorphismenmenge . . . 25
2.3 Der Satz von Maschke . . . 27
2.3.1 Mittelwert einer Abbildung . . . 27
2.3.2 Projektionen . . . 28
2.4 Irreduzible Darstellungen . . . 30

3 Charaktertheorie **31**
3.1 Die Spur einer Matrix . . . 31
3.1.1 Charaktertafeln . . . 39
3.2 Konjugationsklassen . . . 41
3.3 Darstellungen durch den Charakter wiedererkennen . . . 42
3.3.1 Permutationsdarstellung . . . 43
3.3.2 Reguläre Darstellungen . . . 43
3.3.3 Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen . . . 45
3.3.4 Spaltenorthogonalität von Charaktären . . . 46
3.3.5 Kanonische Darstellungen . . . 47

4 Finden der irreduziblen Darstellungen **48**
4.1 Irreduzible Darstellungen des Produkts . . . 48
4.2 Der Abelsche Fall . . . 49
4.2.1 Eindimensionale Darstellungen . . . 49
4.3 Die Diedergruppen D_n . . . 50
4.4 Die symmetrischen Gruppen S_n . . . 52
4.4.1 Die Konjugationsklassen . . . 52
4.5 Young Diagramme . . . 54

5 Der Satz von Frobenius **58**
5.1 Die Polynome $\Theta_\rho(G)$ . . . 59
5.2 Die höheren Charaktere . . . 59
5.3 Der Determinantensatz . . . 59
5.3.1 Beweis des ersten Teils . . . 60
5.3.2 Bewies des zweiten Teils . . . 60
5.4 Einige Beispiele . . . 61
5.4.1 Die Gruppe S_3 . . . 61

6 Einige Anwendungen in der Gruppentheorie **62**
6.1 Die Frobenius-Ergänzung . . . 63

7 Die induzierte Darstellung und die Frobenius-Reziprozität **64**
7.1 Die Induzierte Darstellung . . . 64
7.2 Auf Charakteren fortgesetzt . . . 65

0 Motivation

Dieser Kapitel dient nur der Motivation des Kurses und wird nicht abgeprüft. Der Kurs fängt offiziell" ab Seite 9 an.

0.1 Dedekind's Problem

0.1.1 Die Ursprüngliche Frage (aus der algebraischen Zahlentheorie)

Dedekind war eine treibende Kraft in der algebraischen Zahlentheorie. In den 1880-er und 1890 Jahren hat er viel in diese Richtung geleistet und unter anderem eines der wichtigsten Sätze darin bewiesen (Dedekinds Primfaktorzerlegungssatz, '94).

Eines der wichtigen Fragen in der algebraischen Zahlentheorie ist wie folgt: Sei K eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$, sprich $[K:\mathbb{Q}] = n < \infty$. Laut dem Satz über den primitiven Element (Galois Theorie) gibt es ein Element $\alpha \in K$, so dass $K = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}[x]/\mathfrak{m}_\alpha$, wobei $\mathfrak{m}_\alpha$ das Minimalpolynom von α ist (sprich das (normierte) Polynom vom kleinsten Grad, so dass α eine Wurzel davon ist). Da $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}[x]/\mathfrak{m}_\alpha$, wird ein Ringhomomorphismus

$$f : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{C}$$

eindeutig durch den Bild von α festgelegt und das Bild $f(\alpha)$ muss selber eine Nullstelle von $\mathfrak{m}_\alpha$ sein. Laut dem Galoischen Separabilitätssatz ein irreduzibles Polynom (was $\mathfrak{m}_\alpha$ immer sein wird) über einen Körper vom Charakter Null (was $\mathbb{C}$ ist) keine doppelten Wurzeln haben kann, hat $\mathfrak{m}_\alpha$ genau $n = [K:\mathbb{Q}]$ Wurzeln. Jedes einzelne dieser Wurzeln kann das Bild $f(\alpha)$ sein und kein anderes. Als solches gibt es genau n verschiedene Einbettungen

$$\sigma_i : K \to \mathbb{C}.$$

Für eine $\mathbb{Q}$-Basis $\mathcal{B} \coloneqq \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ von K wird

$$\Delta(\mathcal{B}) \coloneqq \det \begin{pmatrix} \sigma_1(\beta_1) & \sigma_1(\beta_2) & \cdots & \sigma_1(\beta_n) \\ \sigma_2(\beta_1) & \sigma_2(\beta_2) & \cdots & \sigma_2(\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_n(\beta_1) & \sigma_n(\beta_2) & \cdots & \sigma_n(\beta_n) \end{pmatrix}$$

die Diskriminante der Basis $\mathcal{B}$ genannt und ist von großer Bedeutung. Im speziellen Fall wenn $\mathcal{A} = \{1, \beta, \beta^2, \cdots, \beta^{n-1}\}$, kann man es mit der Vandermonde Determinante berechnen (was uns $\prod_{i<j}(\sigma_j(\beta) - \sigma_i(\beta))$ gibt). Im Allgemeinen ist dies jedoch schwerer.

Sein $\sigma_i(\alpha)$ linear unabhängig, sprich $\mathcal{A} = \{\sigma_1(\alpha), \sigma_2(\alpha), \ldots, \sigma_n(\alpha)\}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K. Wenn K eine Galois Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist, dann sind die $\sigma_i(K) \simeq K \subseteq \mathbb{C}$ und als solches sind die σ_i's Automorphismen, sprich, sie formen eine Gruppe. Man kann daher $\sigma_i(\sigma_j(\alpha))$ betrachten um folgende Matrix zu erhalten:

$$\Delta(\mathcal{A}) \coloneqq \det \begin{pmatrix} \sigma_1(\sigma_1(\alpha)) & \sigma_1(\sigma_2(\alpha)) & \cdots & \sigma_1(\sigma_1(\alpha)) \\ \sigma_2(\sigma_1(\alpha)) & \sigma_2(\sigma_2(\alpha)) & \cdots & \sigma_2(\sigma_n(\alpha)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_n(\sigma_1(\alpha)) & \sigma_n(\sigma_2(\alpha)) & \cdots & \sigma_n(\sigma_n(\alpha)). \end{pmatrix}$$

Dedekind wollte dessen Determinante berechnen und merkte5, dass er versuchte einen speziellen Fall der folgenden Aufgabe zu lösen:

0.1.2 Als Frage der Gruppentheorie

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n (also, $|G| = n$). Für ein Element $g \in G$ der Gruppe G, sei T_g eine Variable (was wir einfach formell so definieren). Wenn man nun in der Cayley Tafel (Verknüpfungstafel) die Gruppenelemente mit den neuen Variablen ersetzen, erhalten wir

ein $n \times n$-Matrix, wessen Reihen und Spalten mit den Elementen der Gruppe G indexiert werden. In der (g,h)-ten Position steht damit T_{gh}.

Wir wollen die Determinante dieser Matrix berechnen. Dies ist ein Polynom vom Grad n, in n-Variablen. Dedekind merkte, dass es etwas geschickter war, sich stattdessen die Determinante der Matrix zu betrachten, wo im (g,h)-ten Eintrag $T_{gh^{-1}}$ steht (statt (T_{gh})). Da man die ein Matrix in die Andere durch Spaltenpermutation überführen kann, unterscheiden sie die Determinante nur mit dem Vorzeichen. Die Matrix $(T_{gh^{-1}})_{g,h\epsilon G}$ wird die *Gruppenmatrix* von G genannt. Die zugehörige Determinante wird mit $\Theta(G)$ beschriftet.

Die Herausforderung nun ist, das Polynom $\Theta(G)$ als Produkt von irreduziblen Polynomen zu faktorisieren. Dedekind hat dies im Abelschen Fall gemacht. Den nicht-Abelschen Fall konnte er nicht lösen und gab die Aufgabe an Frobenius weiter, welcher es lösen könnte. Die Lösung war die Erfindung der Darstellungstheorie von endlichen Gruppen.

0.2 Der Abelsche Fall

0.2.1 Einige Beispiele

Lass uns zuerst einige Beispiele machen. Sei $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1 \mid 2 = 0\}$. Die Cayley Tafel ist wie folgt:

+	0	1
0	0	1
1	1	0.

Als solches ist das gesuchte Polynom

$$\Theta(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \det \begin{pmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1 & T_0 \end{pmatrix} = T_0^2 - T_1^2 = (T_0 + T_1)(T_0 - T_1).$$

Sei nun $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Die Cayley Tafel (links) und die Tafel, wo wir gh^{-1} (bzw. $g - h$) statt gh (bzw. $g + h$) an der (g,h)-ten Stelle schreiben (rechts) sind wie folgt

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

−	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

gegeben. Es geht nun die folgende Determinante zu studieren:

$$\Theta(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \det \begin{pmatrix} T_0 & T_3 & T_2 & T_1 \\ T_1 & T_0 & T_3 & T_2 \\ T_2 & T_1 & T_0 & T_3 \\ T_3 & T_2 & T_1 & T_0 \end{pmatrix}.$$

Dies macht schon weniger Spaß zu rechnen und faktorisieren ist schon deutlich schwieriger. Es folgt aber sehr einfach von Dedekinds Satz, dass

$$\Theta(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \phi_0\phi_1\phi_2\phi_3,$$

wobei

$$\phi_0 = T_0 + T_1 + T_2 + T_3,$$
$$\phi_1 = T_0 + iT_1 - T_2 - iT_3,$$
$$\phi_2 = T_0 - T_1 + T_2 - T_3$$

und

$$\phi_3 = T_0 - iT_1 - T_2 + iT_3.$$

0.2.2 Der allgemeine Abelsche Fall

Sei G eine Abelsche Gruppe. Dann ist $\Theta(G)$ ein Produkt von n Polynomen vom Grad 1. Dies ist schon eine starke Aussage, aber wir können deutlich mehr sagen: Wir können diese linearen Faktoren explizit berechnen.

Dies wird durch die Charaktere der Abelschen Gruppe gegeben. Dieser Begriff wurden schon von Gauß in den 1800-er Jahren eingeführt und spielt auch in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle, vor allem im Bereich der L-Serien. Es ist auf L-Serien basierend, dass Dirichlet beweisen konnte, dass jede arithmetische Progression $a, a+d, a+2d, \cdots$ unendliche viel Primzahlen enthält, sofern a und d teilerfremd sind.

Explizit ist die Definition wie folgt: Ein *Charakter* einer Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $\chi : G \to \mathbb{C}^*$, wobei $\mathbb{C}^*$ die Einheiten der Komplexen Zahlen sind, aufgefasst als eine multiplikative Gruppe. Sprich, ein Charakter von G ist eine Abbildung $\chi : G \to \mathbb{C}^*$, so dass

$$\chi(g+h) = \chi(g)\chi(h).$$

Wir schreiben die Verknüpfung in G additiv, da wir in diesem Abschnitt Abelsche Gruppen betrachten. Die Menge aller Charaktere von G beschriften wir mit $\hat{G}$.

un können wir Dedekinds Resultat formulieren:

Satz 0.2.1. *(Dedekind) Sei G eine Abelsche Gruppe. Es gilt*

$$\Theta(G) = \prod_{\chi \in \hat{G}} \phi_\chi,$$

wobei

$$\phi_\chi = \sum_{g \in G} \chi(g) T_g.$$

Wir werden gegen Ende unseres Kurses einen deutlich stärkeren Satz von Frobenius beweisen (was auch für nicht-Abelsche Gruppen gilt) und dies als ein Korollar folgern.

Bestimmen der Charaktere Sein K und H Abelsche Gruppen. Die direkte Summe $K \oplus H$ ist die Menge aller Paare (k,h), wobei $k \in K$ und $h \in H$. Die Gruppenstruktur auf $K \oplus H$ ist durch

$$(k,h) + (k',h') = (k+k', h+h')$$

gegeben. Es ist wohlbekannt, dass jede endliche Abelsche Gruppe eine direkt Summe von zyklischen Gruppen ist. Wir bemerken, dass für Charaktere $\theta \in \hat{H}$ und $\eta \in \hat{K}$

$$\chi(h,k) := \theta(h)\eta(k)$$

ein Charakter von $G = H \oplus K$ ist. Dies wird mit (θ, η) bezeichnet. Auf der anderen Seite, wenn χ ein Charakter von G ist, dann ist $\chi = (\theta, \eta)$, wobei $\theta(h) = \chi(h,0)$ und $\eta(k) = \chi(0,k)$.

Es folgt, dass

$$\widehat{H \oplus K} = \hat{H} \oplus \hat{K}.$$

Als solches brauchen wir nur noch die Charaktere der zyklischen Gruppen verstehen.

Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung n. O.B.d.A. kann man annehmen, dass $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \cdots, n-1\}$. Für einen Charakter χ gilt in diesem Fall

$$\chi(k) = (\chi(1))^k.$$

Als solches ist χ eindeutig durch $\chi(1)$ festgelegt. Da $\chi(0) = 1$, gilt

$$1 = \chi(0) = \chi(n1) = (\chi(1))^n.$$

Als solches muss $\chi(1)$ eine n-te Einheitswurzel sein. Wenn umgekehrt ω eine n-te Einheitswurzel ist, dann definiert

$$\chi_\omega(k) := \omega^k$$

einen Charakter. Es gibt genau n viele n-te Einheitswurzeln:

$$1, \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), \cdots, \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right),$$

oder

$$1, e^{\frac{2e\pi i}{n}}, e^{\frac{4e\pi i}{n}}, \ldots, e^{\frac{2(n-1)e\pi i}{n}}.$$

Somit definiert jedes dieser Wurzeln genau einen Charakter, da es der Wert des Charakters auf 1 ist. Die anderen Werte sind die Potenzen dieser Wurzeln.

Beispiele Man nehme die Gruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2 \mid 3 = 0\}$. Dies hat 3 korrespondierende Einheitswurzeln

$$\left\{1, \omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \omega^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.\right\}$$

Die dazu zugehörigen Charaktere sind

$\chi_i(j)$	χ_0	χ_1	χ_2
0	1	1	1
1	1	ω	ω^2
2	1	ω^2	ω.

Wir erhalten als solches

$$\Theta(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \det\begin{pmatrix} T_0 & T_2 & T_1 \\ T_1 & T_0 & T_2 \\ T_2 & T_1 & T_0 \end{pmatrix} = T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 - 3T_0T_1T_3 = \phi_0\phi_1\phi_2,$$

mit

$$\phi_0 = T_0 + T_1 + T_2,$$
$$\phi_1 = T_0 + \omega T_1 + \omega^2 T_2,$$
$$\phi_2 = T_0 + \omega^2 T_1 + \omega T_2.$$

Im Vergleich dazu, wäre die Cayley Tafel

$\cdot$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

und die zugehörige Determinante der Matrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} T_0 & T_1 & T_2 \\ T_1 & T_2 & T_0 \\ T_2 & T_0 & T_1 \end{pmatrix}$$

gleich $\det(\mathcal{M}) = 3T_0T_1T_2 - T_0^3 - T_1^3 - T_2^3$. Man müsste nun versuchen, diese Polynom in 3 Variablen zu faktorisieren. Die ist schon nicht so einfach und es ist klar, dass dies für steigende n deutlich schwerer wird.

0.3 Der Nicht-Abelsche Fall

Wenn die Gruppe G nicht mehr Abelsch ist, wird die Situation deutlich komplizierter. Lasst uns hierzu ein Beispiel durchgehen:

Der Fall S_3 Sei G die Symmetriegruppe auf 3 Elementen, sprich

$$G = S_3 = \{g_1 = 1, g_2 = (123), g_3 = (132), g_4 = (23), g_5 = (13), g_6 = (12)\}.$$

Die Verknüpfungstafel ist

$\cdot$	1	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
1	1	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)
(12)	(12)	1	(123)	(132)	(23)	(13)
(23)	(23)	(132)	1	(123)	(13)	(12)
(13)	(13)	(123)	(132)	1	(12)	(23)
(123)	(123)	(13)	(12)	(23)	(132)	1
(132)	(132)	(23)	(13)	(12)	1	(123)

mit der zugehörigen Matrix

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} T_1 & T_6 & T_4 & T_5 & T_3 & T_2 \\ T_6 & T_1 & T_2 & T_3 & T_5 & T_4 \\ T_4 & T_3 & T_1 & T_2 & T_6 & T_5 \\ T_5 & T_2 & T_3 & T_1 & T_4 & T_6 \\ T_2 & T_5 & T_6 & T_4 & T_1 & T_3 \\ T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_2 & T_1, \end{pmatrix}$$

wobei wir T_i für T_{g_i} schreiben. Die Determinante dazu ist

$$\Theta(S_3) = \det(\mathcal{M}) = \phi_1\phi_2\phi_3^2,$$

mit

$$\phi_1 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6,$$

$$\phi_2 = T_1 + T_2 + T_3 - T_4 - T_5 - T_6,$$

$$\phi_3 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 - T_4^2 - T_5^2 - T_6^2 - T_1T_2 - T_2T_3 - T_1T_3 + T_4T_5 + T_4T_6 + T_5T_6.$$

Dies ist eine Zerlegung in irreduzible Faktoren.

Auf der anderen Seite gibt es genau zwei Homomorphismen $G \to \mathbb{C}^*$, welche durch

$$\tau \mapsto 1 \quad \text{und} \quad \tau \mapsto \mathsf{Sgn}(\tau)1$$

gegeben sind. Mit $\mathsf{Sgn}(\tau)$ meinen wir den Signum (Vorzeichen) der Permutation $\tau \in S_3$. Die zwei linearen Faktoren ϕ_1 und ϕ_2 von $\Theta(S_3)$ korrespondieren genau zu diesen zwei Charakteren, es gibt jedoch noch eine quadratische Komponente ϕ_3, welches zu keinem dieser Homomorphismen korrespondiert.

Wir merken direkt, dass Homomorphismen $G \to \mathbb{C}^*$ nicht ausreichen um alle irreduziblen Faktoren von $\Theta(G)$ zu beschreiben. Dedekind war nicht in der Lage, die irreduziblen Faktoren vom höherem Grad zu klassifizieren. Frobenius schaffte es, indem er ein neues Bereich der Mathematik anfing: Darstellungstheorie von endlichen Gruppen.

Die Idee war es, sich Gruppenhomomorphismen der Form

$$\rho : G \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$$

anzusehen, was er n-dimensionale Darstellungen der Gruppe G nannte (über $\mathbb{C}$). Mit $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ bezeichnen wir wie gewohnt die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{C}$. Man merke, dass für $n = 1$, wir $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^*$ haben, was mit der Definition des Charakters, wie oben Diskutiert, übereinstimmt. Dies ist jedoch *nicht* ganz richtig.

Frobenius definiert den Charakter einer Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$, indem er $\chi_\rho(g) : G \to \mathbb{C}^*$ durch $g \mapsto \mathsf{Sp}(\rho(g))$ für jeden $g \in G$ nahm, wobei $\mathsf{Sp}(\rho(g))$ die Spur von $\rho(g) \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ ist. Da bei $n = 1$, die Matrix, dessen Spur und Determinante miteinander übereinstimmen, konnte man dies

bei $n = 1$ nicht direkt sehen. Es gibt auch andere Sachen, die man bei Dimension 1 nicht direkt erkannte, was Frobenius benutzte um die Determinante $\Theta(G)$ zu zerlegen, spezifisch die "höheren Charaktere" $\chi^i, i \geq 1$, auch Pseudocharaktere genannt. Obwohl wir uns nicht mit denen in diesem Kurs beschäftigen wollen, sagen wir, dass bei Darstellungen $\rho : G \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ vom Grad n, $\chi^i = 0$ für alle $i > n$. Daher gibt es bei Darstellungen vom Grad 1 auch keine höheren Charaktere.

Frobenius bewies, dass die irreduziblen Faktoren von $\Theta(G)$ zu den *irreduziblen Darstellungen* von G korrespondieren. Da alle irreduziblen Darstellungen einer Abelschen Gruppe vom Grad 1 sind, ist es auch erklärt, warum Dedekind den Abelschen Fall rein mit Homomorphismen $G \to \mathbb{C}^*$ lösen konnte, den nicht-Abelsche Fall jedoch nicht.

Frobenius hat dies jedoch im Allgemeinen gelöst, einschließlich expliziter Formel. Auch andere Phänomene, wie die Tatsache, dass bei S_3 der quadratische Faktor ϕ_3 mit Multiplizität zwei vorkam, wird mithilfe der Darstellungstheorie von endlichen Gruppen klar.

Wir werden im Laufe unseres Kurses zu diesem motivierendem Beispiel zurückkehren und versuchen so einiges was hier passiert zu erklären.

Vereinfachte Version Eine vereinfachte Version des Resultats geben wir hier:

Satz 0.3.1 (Frobeniusscher Determinantensatz)**.** *Sei $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ eine endliche Gruppe und $\mathcal{M} = (a_ij)$, die Matrix mit Einträgen $a_ij = g_i g_j$. Die Determinante von $\mathcal{M}$ zerfällt über $\mathbb{C}$ als*

$$\det(\mathcal{M}) = \prod_{i=1}^{r} f_i\left(g_1, \ldots, g_n\right)^{e_i},$$

mit f_i irreduzibel, wobei r die Anzahl der Konjugationsklassen von G bezeichnet. Des weiteren ist $\mathsf{grad}(f_i) = e_i$.

Zur Erinnerung sagen wir, dass zwei Elemente $x, y \in G$ einer Gruppe genau dann konjugiert heißen, wenn es ein $y \in G$ gibt, mit $x = zyz^{-1}$.

1 Von G-Mengen zu $K[G]$-Modulen

1.1 Vorläufige Ergebnisse aus der linearen Algebra

Definition 1.1.1. Sein V, W zwei Vektorräume über einen Körper K. Eine K-lineare Abbildung (auch K-Vektorraumhomomorphismus genannt) ist eine Abbildung $\alpha : V \to W$, so dass für alle $a, b \in V$, $k, k' \in K$, gilt

$$\alpha(ka + k'b) = k\alpha(a) + k'\alpha(b).$$

Anders gesagt, es ist ein Gruppenhomomorphisme $\alpha : V \to V$ ($\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$), so dass $\alpha(ka) = k\alpha(a)$.

Definition 1.1.2. Eine K-lineare Abbildung $\alpha : V \to W$ heißt *K-Vektorraumisomorphie* bzw. *K-lineare Bijektionen*, wenn es eine K-lineare Abbildung $\beta : W \to V$ gibt, so dass $\beta \circ \alpha = \mathsf{Id}_V$ und $\alpha \circ \beta = \mathsf{Id}_W$ die Identitätsabbildungen sind.

Lemma 1.1.3. *Sei $\alpha : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, so dass es als eine Mengenabbildung betrachtet bijektiv ist. Dann ist α ein K-Vektorraumisomorphie.*

Anders ausgedrückt, das Inverse (als Mengenabbildung), wenn es existiert, einer K-linearen Abbildung ist K-linear.

Beweis. Aufgabe **??**. □

Im speziellen Fall, wenn $\alpha : V \to V$ in sich selbst abbildet, dann nennen wir es eine *K-lineare Selbstabbildung*, bzw. ein *K-Vektorraumendomorphismus*. Wenn es zusätzlich eine *K-lineare Bijektion* ist, dann nennen wir es ein *K-Vektorraumautomorphismus* bzw. *K-lineare Bijektion*.

Die Menge aller K-linearen Bijektionen wird mit $\mathrm{Gl}(V) = \mathrm{Aut}_{K-\mathsf{Vekt}}(V)$ bezeichnet.

1.1.1 $\mathrm{Gl}(V)$ und Gl_n: Vektorraumhomomorphismen und Matrizen

Sei V endlich Dimensional als eine K-Vektorraum. Dies bedeutet, es gibt eine endliche Teilmenge $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq V$, so dass jedes Element $a \in V$, auf genau eine Art und Weise als eine K-lineare Kombination der $\{e_i\}$'s dargestellt werden kann: Das heißt, es gibt Elemente $k_1, \ldots, k_n \in K$, mit

$$a = k_1 e_1 + \ldots + k_n e_n$$

und für beliebige $k'_1, \ldots, k'_n \in K$, impliziert

$$0 = k'_1 e_1 + \ldots + k'_n e_n,$$

dass $k'_1 = \cdots = k'_n = 0$. In diesem Fall kann man zu einem beliebigen $\alpha \in \mathrm{Gl}(V)$ eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ assoziieren, wobei a_{ij} das Koeffizient von e_i ist, wenn man $\alpha(e_j)$ als eine K-lineare Kombination der Basiselemente $\{e_1, \ldots, e_n\}$ darstellt. Das heißt, es gilt

$$\alpha(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Beispiel 1.1.4. Man kann die Formel leicht mit einer 2×2 Matrix überprüfen: Wenn nämlich $\alpha(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$ und $\alpha(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$, dann haben wir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wie gewollt. Hier ist natürlich $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Sein $\alpha : V \to V$ und $\beta : V \to V$ K-Vektorraumhomomorphismen, mit A und B die zugehörigen Matrizen. Wir erinnern uns daran, dass die Komposition $\alpha \circ \beta$ zum Produkt der Matrizen $A \times B$ wird. Als solches ist α genau dann ein K-Vektorraumisomorphismus, wenn die dazu assoziierte Matrix $A = (a_{ij})$ invertierbar ist, was wiederum genau dann passiert, wenn die Determinante eine Einheit in K ist, sprich, ungleich Null.

Wir fassen unsere Diskussion zusammen als:

Proposition 1.1.5. *Die Gruppe* $\mathrm{Gl}(V)$ *isomorph ist zu* Gl_n*, der Gruppe der* $n \times n$ *Matrizen mit Determinante ungleich Null.*

Wir erwähnen auch, dass die umgekehrte Richtung wie folgt gegeben wird: Für eine $n \times n$ Matrix $A \in \mathrm{Gl}_n$ definieren wir die Abbildung $v \mapsto Av$.

1.2 Module

In diesem Abschnitt wird nicht verlangt, dass ein Ring kommutativ ist, es sei denn, dies wird explizit erwähnt.

Definition 1.2.1. Sei A ein Ring. Ein *A-Modul* M ist eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe auf der A *linear operiert*. Dies bedeutet: Wir haben eine Abbildung $\phi : A \times M \to M$, so dass wenn wir abkürzend $am := \phi(a, m)$ schreiben, folgendes gilt:

(i) $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$

(ii) $(a_1 + a_2)m = a_1m + a_2m$

(iii) $(a_1a_2)m = a_1(a_2m)$

(iv) $1 \cdot m = m$,

wobei $1, a, a_1, a_2 \in A$ und $m, m_1, m_2 \in M$.

Normalerweise nenne wir M einfach das A-Modul und schreiben nicht explizit das ϕ mit dazu, obwohl dies natürlich teil der Struktur ist.

Proposition 1.2.2. *Definition 1.2.1 ist Äquivalent zu sagen, dass wir ein Ringhomomorphismus* $A \to \mathsf{End}(M)$ *haben, wobei* $\mathsf{End}(M)$ *das (nicht zwangsweise kommutative) Ring der Gruppenendomorphismen von* M *bezeichnet.*

Beweis. Aufgabe **??** □

Lemma 1.2.3. *Sei* $f : A \to B$ *ein Ringhomomorphismus und* M *ein* B*-Modul. So ist es durch die Verknüpfung* $(a, m) \mapsto f(a)m$ *ein* A*-Modul.*

Bemerkung 1.2.4. Wenn N ein A-Modul ist, so kann man es auch in natürlicher Weise als ein B-Modul auffassen, sogar in zwei Arten: Einmal mit dem Tensorprodukt und einmal durch Hom. Dies wird aber nicht im Kurs benötigt werden.

Definition 1.2.5. Sein M_1, M_2 A-Module. Eine Abbildung $\varphi : M_1 \to M_2$ heißt *A-linear*, oder auch *A-Modulhomomorphismus*, wenn

(i) $\varphi(m + m') = \varphi(m) + \varphi(m')$ und

(ii) $\varphi(am) = a\varphi(m)$ für alle $a \in A$, $m, m' \in M_1$ gilt.

Die Menge aller A-linearen Abbildungen von M_1 nach M_2 wird mit $\mathsf{Hom}_A(M_1, M_2)$ beschriftet, manchmal auch einfach $\mathsf{Hom}(M_1, M_2)$, wenn es vom Kontext her klar ist, dass es sich um A-Modulhomomorphismen handelt.

Lemma 1.2.6. *Sein* M_1, M_2, M_3 A*-Module,* $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathsf{Hom}_A(M_1, M_2)$ *und* $\varphi_3 \in \mathsf{Hom}_A(M_2, M_3)$.

(i) *Mit* $(a\varphi_1)(m) := a\varphi_1(m)$ *und* $(\varphi_1+\varphi_2)(m) := \varphi_1(m)+\varphi_2(m)$ *wird die Menge* $\mathsf{Hom}_A(M_1, M_2)$ *zu einem* A*-Modul. (Hier wird die Kommutativität von* A *benötigt.)*

(ii) *Die Komposition von* A*-linearen Abbildungen ist wieder* A*-linear: Sprich,* $\varphi_3 \circ \varphi_1 \in \mathsf{Hom}(M_1, M_3)$.

Beweis. Aufgabe **??**. □

Wie gewohnt ist $\varphi : M_1 \to M_2$ ein Isomorphismus von A-Modulen, wenn ein $\psi : M_2 \to M_1$, A-linear, gibt, so dass $\psi \circ \varphi = \mathsf{Id}$ und $\varphi \circ \psi = \mathsf{Id}$. Es ist ein leichtes sich zu überzeugen, dass dies Äquivalent ist zu sagen, dass die A-lineare Abbildung φ eine Bijektion ist.

Beispiel 1.2.7. a) Ein Ring A ist immer ein Modul über sich selbst. Dies sieht man am einfachsten, durch $\mathsf{Id} : A \to A$ und dann Lemma 1.2.3 angewandt.

b) Wenn $A = K$ ein Körper ist, dann sind Module genau Vektorräume und Modulhomomorphismen genau Vektorraumhomomorphismen. Dies ist von der Definition her klar.

c) Wenn $A = \mathbb{Z}$ das Ring der ganzen Zahlen ist, dann sind die Module und deren Homomorphismen genau Abelsche Gruppen und Gruppenhomomorphismen. Beweis des letzten ist Hausaufgabe **??**.

Definition 1.2.8. Ein *Untermodul* N eines A-Moduls M ist eine Untergruppe von M, welches abgeschlossen unter der Multiplikation mit Elementen aus A ist.

Lemma 1.2.9. *Sei* $N \subseteq M$ *ein Untermodul. Die Faktorgruppe* M/N *ist durch* $a(m+N) := am+N$ *ein* A*-Modul, genant* Faktormodul *und die natürliche Projektion* $\pi : M \to M/N$ *ist* A*-linear (und freilich surjektiv).*

Beweis. Aufgabe **??**. □

Proposition 1.2.10. *Sei* $N \subseteq M$ *ein Untermodul. Es gibt eine ordnungserhaltende Bijektion zwischen den Untermodulen* E *von* M*, die* N *enthalten und den Untermodulen* F *von* M/N*, gegeben durch* $E \mapsto E/N$ *bzw.* $F \mapsto \pi^{-1}(F)$*, wobei* $\pi : M \to M/N$ *die kanonische Projektion ist.*

Beweis. Aufgabe. □

Lemma 1.2.11. *Sei* $\varphi : M \to N$ *eine* A*-lineare Abbildung.*

(i) *Der* Kern $\mathsf{Ker}(\varphi) := \{m \in M \mid \varphi(m) = 0\} \subseteq M$ *ist ein Untermodul von* M.

(ii) *Das* Bild $\mathsf{Bild}(\varphi) := \{n \in N \mid \exists m \in M \text{ mit } \varphi(m) = n\} \subseteq N$ *ist ein Untermodul von* N.

(iii) *Der* Kokern $\mathsf{Koker}(\varphi) := N/\mathsf{Bild}(\varphi)$ *ist ein Faktormodul von* N.

Beweis. Aufgabe **??**. □

Proposition 1.2.12 (Erster Isomorphiesatz)**.** *Sei* $\varphi : M \to N$ *eine* A*-Abbildung. Es gilt*

$$M/\mathsf{Ker}(\varphi) \simeq \mathsf{Bild}(\varphi).$$

Beweis. Dies sollte für Abelsche Gruppen schon bekannt sein. Der Rest ist, nach Lemma 1.2.9, dass die Abbildung $\lambda : M/\mathsf{Ker}(\varphi) \to \mathsf{Bild}(\varphi)$, gegeben durch $m + \mathsf{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(m)$ A-linear ist. Da jedoch $\lambda(am + \mathsf{Ker}(\varphi)) = \varphi(am) = a\varphi(m) = a\lambda(m + \mathsf{Ker}(\varphi))$, ist dies klar. □

Freie Module

Lemma 1.2.13. *Sei* I *eine Indexmenge. Definiere* $A^{(I)}$ *als die Menge aller Abbildungen* $f : I \to A$*, mit* $f(i) = 0$ *für* fast alle *(alle außer endlich viele)* $i \in I$*. Dies ist ein* A*-Modul durch* $(af)(i) := a(f(i))$ *und* $(f+g)(i) := f(i) + g(i)$*. Ist* $I = \{1, \ldots, n\}$ *eine endliche Menge, so ist* $A^{(I)} = A^n$ *die Menge aller* n*-Tupeln der Elemente aus* A.

Beweis. Kann direkt von der Hand überprüft werden. □

Definition 1.2.14. Das Modul $A^{(I)}$ wird als das *freie A-Modul* auf der Menge I bezeichnet.

Definition 1.2.15. (a) Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in M$ heißt ein *Erzeugendensystem* von M, wenn $M = \sum_{i\in I} Ax_i$ gilt. Anders gesagt, wenn jedes Element $m \in M$ als $m = \sum_{i\in I} a_i x_i$ geschrieben werden kann, mit $a_i \in A$.

(b) Eine Familie $(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in M$ heißt eine *Basis* von M, wenn $(x_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von M ist und

$$\sum_{i\in I} a_i x_i = \sum_{i\in I} a_i' x_i \Rightarrow a_i = a_i',$$

für jeden $i \in I$.

(c) Besitzt M ein Erzeugendensystem $(x_i)_{i\in I}$, mit $|I| = n < \infty$ endlich, so heißt M *endlich erzeugt*.

Bemerkung 1.2.16. Im Gegensatz zu Vektorräumen haben Module normalerweise keine Basis mehr. Als Beispiel, ist die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}$-Modul (Teil (iii) vom Beispiel 1.2.7), hat aber keine Basis. Es gilt folgendes Lemma:

Lemma 1.2.17. *Ein A-Modul M ist genau dann frei, wenn es eine Basis besitzt.*

Beweis. Habe M eine Basis $(m_i)_{i\in I}$. Die Abbildung $M \to A^{(I)}$, $m = \sum_{i\in I} a_i m_i \mapsto (i \mapsto a_i)$ ist wohldefiniert, da bei Definition einer Basis, aus $\sum_{i\in I} a_i x_i = \sum_{i\in I} a_i' x_i$ folgt, dass $a_i = a_i'$. Es ist injektiv, da aus $\sum_{i\in I} a_i m_i$ genau dann auf die Identität in $\mathsf{Abb}(I, A)$ abbildet (sprich au die Abbildung $i \mapsto 0\ \forall i \in I$), wenn $a_i = 0$ für jeden $i \in I$. Es ist surjektiv, da für eine jegliche Abbildung $i \mapsto a_i$, wir das Element $\sum_{i\in I} a_i m_i$ aufbauen können, was nun Bijektivität impliziert.

Andererseits formt $\{f_i\}_{i\in I}$, mit $f_i(j) = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$ eine Basis von $M \simeq A^{(I)}$. □

Korollar 1.2.18. *Ein endlichdimensionaler freier A-Modul ist endlich erzeugt.*

Beweis. Dies folgt direkt vom obigen Beweis (1.2.17), weil man die $f_i(j)$'s eine Basis und somit ein erzeugendes System sind. □

Proposition 1.2.19. *Sei $B \subseteq F$ eine Basis eines freien A-Moduls F und M ein beliebiges A-Modul. Es gilt*

$$\mathsf{Hom}(F, M) \simeq \mathsf{Abb}(B, M).$$

Anders gesagt, eine A-lineare Abbildung von einem freien Modul wird eindeutig durch die Basiselemente festgelegt, welche frei gewählt werden können.

Beweis. Um eine Isomorphie aufzubauen, müssen wir in beide Richtungen Homomorphismen geben, welche invers zu einander sind. Die Abbildung in eine Seite ist klar: Durch das Einschränken $\varphi|_B$ erhält man durch eine A-lineare Abbildung $\varphi : F \to M$ eine Mengenabbildung $\varphi|_B : B \to M$.

Für die andere Seite, sei $\psi : B \to M$ eine Abbildung. Da jedes Element $f \in F$ als $f = \sum_{b\in B} a_b b$ dargestellt werden kann, ist es nun klar, wie wir die Abbildung $F \to M$ aufbauen: Wir senden $\sum_{b\in B} a_b b = f \mapsto \sum_{b\in B} a_b \psi(b)$. Es ist nun ein Einfaches zu überprüfen, dass dies wohldefiniert und A-lineare ist. Des weiteren ist es "Inverse" zum "Einschränken", dass wir im ersten Abschnitt dieses Beweises definiert haben. □

Korollar 1.2.20. *Es gilt $\mathsf{Hom}_A(A^{(n)}, M) \simeq M^n$, spezifisch ist $\mathsf{Hom}_A(A, M) \simeq M$.*

Beweis. Da A^n eine Basis $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ mit n Elementen hat, ist laut Proposition 1.2.19 $\mathsf{Hom}(A^{(n)}, M) \simeq \mathsf{Abb}(B, M)$. Für die Menge der Abbildungen zwischen zwei Mengen X, Y gilt aber $\mathsf{Abb}(X, Y) \simeq Y^{|X|}$, was uns nun das gewünschte Resultat gibt. □

Algebren

Definition 1.2.21. Sei A ein kommutatives Ring. Ein A-Modul B, das zusätzlich ein Ring mit Einheit ist, wird A-Algebra genannt, wenn für alle $a \in A$, $b, b' \in B$ gilt

$$(ab)b' = a(bb') = b(ab').$$

Definition 1.2.22. Sein B, C A-Algebren. Ein A-Algebrahomomorphismus ist eine Abbildung $f : B \to C$, so dass

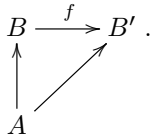
(i) $f(b + b') = f(b) + f(b')$,

(ii) $f(1_B) = 1_C$ und

(iii) $f(ab + b') = af(b) + f(b')$.

Definition 1.2.23. Wir definieren den *Zentrum* eines Ringes R als $\mathcal{Z}(R) : \{r \in R \mid xr = rx \forall x \in R\}$.

Proposition 1.2.24. *Zu sagen, dass B ein A-Algebra ist, ist äquivalent zu sagen, dass wir ein Ringhomomorphismus $A \to \mathcal{Z}(B)$ haben. A-Algebrahomomorphismen sind dann genau die kommutierenden Dreiecke von Ringhomomorphismen:*



Beweis. Aufgabe **??**. □

1.2.1 G-Mengen

Definition 1.2.25. Eine *G-Menge* ist eine Menge X, zusammen mit einer Abbildung

$$G \times E \to E, \quad (g, e) \mapsto ge, \ g \in G, e \in E,$$

so dass
i) $1e = e$ und
ii) $(gh)e = g(he)$.
Wir nennen dies auch eine *Wirkung* von G auf X.

Definition 1.2.26. Sein E und E' zwei G-Mengen. Ein *G-Mengenhomomorphismus* (auch G-Abbildung genannt) ist eine Abbildung $E \to E'$, so dass $f(ge) = gf(e)$, für jeden $g \in G$ und $e \in E$.
Eine G-Abbildung heißt isomorphismus, wenn es bijektiv ist.

Proposition 1.2.27. *Definition 1.2.25 ist äquivalent zu sagen, dass wir einen Gruppenhomomorphismus $\sigma : G \to S_E$ haben, wobei S_E die Gruppe der Selbstbijektionen von E bezeichnet.*

Beweis. Sei E eine G-Menge, wie in Definition 1.2.25 und $g \in G$ ein Element. Wir definieren die Abbildung

$$\sigma_g : E \to E$$

durch

$$\sigma_g(e) := ge,$$

wobei ge die Wirkung von g auf e ist. Man merke, dass $\sigma_{g^{-1}} \circ \sigma_g = \mathsf{Id}$, da

$$e = 1 \cdot e = (g^{-1}g)e = g^{-1}(ge) = (\sigma_{g^{-1}}) \circ \sigma_g(e),$$

für beliebige $e \in E$. Gleichwie ist natürlich auch $\sigma_g \circ \sigma_{g^{-1}} = \mathsf{Id}$. Daher liegt $\sigma_g \in S_E$. Da E eine G-Menge gilt $(gh)e = g(he)$, was uns $\sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{gh}$ gibt, denn

$$(\sigma_g \circ \sigma_h)(e) = g(he) = (gh)e = \sigma_{gh}(e).$$

Als solches haben wir von einer G-Menge einen Gruppenhomomorphismus $G \to S_E$ aufgebaut.

Auf der andern Seite definieren wir die Wirkung von G auf E durch $(g, e) =: \sigma(g)(e)$. Es ist einfach zu überprüfen, dass diese inverse zu der obigen Konstruktion ist. □

Definition 1.2.28. Eine Teilmenge $A \subseteq E$ einer G-Menge E wird G-*Untermenge* genannt, wenn es unter der Wirkung von G abgeschlossen ist: Sprich $ga \in A$ für alle $a \in A$ und $g \in G$.

Definition 1.2.29. Sei $e \in E$ mit E eine G-Menge.

- Die Teilmenge $Ge := \{ge \mid g \in G\} \subseteq E$ ist eine G-Untermenge von E und wird die *Bahn* (bzw. *Orbit*, Transitivitätsgebiet oder Transitivitätssystem) genannt.
- Die Teilmenge $G_e := \{g \in G \mid ge = e\} \subseteq G$ wird der *Stabilisator* von e genannt. Es ist eine Untergruppe.

Anders gesagt, $e, f \in E$ sind genau dann im selben Orbit, wenn es ein $g \in G$ gibt, mit $f = ge$. Es ist klar, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert, was direkt impliziert, dass die Orbiträume disjunkt sind. Sprich: wenn es ein $x \in Ge \cap Gf$ gibt, dann folgt $Ge = Gf$. (Denn aus $g_1 e = g_2 e'$ folgt $e' = g_2^{-1} g_1 e \in Ge$, also $Ge' \subseteq Ge$. Symmetrie impliziert nun die Aussage.)

Die Menge aller Bahnen wird mit E/G bezeichnet. Dies sollte nicht mit der Notation G/H verwechselt werden, so $H \subseteq G$ eine Untergruppe ist.

Beispiel 1.2.30. Eines der klassischsten Beispiele ist die Wirkung einer Gruppe G auf dessen Fachtorgruppe G/H, für eine Untergruppe $H \subseteq G$. Dies ist durch $(g, \overline{g'}) := \overline{gg'}$ gegeben. Hier gebt es genau einen Orbit, da wir jedes $\overline{g}$ zu jedem $\overline{g'}$ durch $g^{-1}g'$ überführen können.

Da wir aber im Fall $H \subseteq G$ eigentlich zwei Gruppen haben, ist die Sache etwas interessanter. Wir haben auch eine Wirkung von H auf G, gegeben durch $(h, g) := hg$. Die Orbite, was auch *Nebenklassen* genannt werden, korrespondieren genau zu den Elementen von G/H.

Definition 1.2.31. Ein Element $e \in E$ einer G-Menge E wird *Fixpunkt* genannt, wenn für alle $g \in G$ gilt $ge = e$.

Definition 1.2.32. Eine Wirkung heißt *frei*, falls für alle $e \in E$, die Stabilisatoren $G_e = \{1\}$ trivial sind.

Man könnte es auch anders sagen als $ge = he$ impliziert $g = h$.

Definition 1.2.33. Eine Wirkung heißt *treu*, falls die von der Wirkung induzierte Abbildung $G \to S_E$ injektiv ist. Sieh Proposition 1.2.27.

Anders gesagt, $ge = he$ für alle $e \in G$ impliziert $g = h$.

Lemma 1.2.34. *Eine Wirkung ist genau dann treu, wenn das einzige Element $g \in G$, welches für alle $e \in E$ die Gleichung $ge = e$ erfüllt, das triviale Element $g = 1$ ist.*

Beweis. Aufgabe **??**. □

In dem Fall, wenn die Wirkung von G auf E treu ist, wird G auch als die *Permutationsgruppe von E* bezeichnet.

Satz 1.2.35 (Der Satz von Cayley)**.** *Jede Gruppe G ist eine Untergruppe von $S_G = \mathsf{Bij}(G)$.*

Beweis. Aufgabe **??**. □

Transitive Gruppenwirkung

Definition 1.2.36. Ein Gruppenwirkung wird *transitiv* genannt, wenn es ein $e \in E$ gibt, so dass $Ge = E$.

Äquivalent kann man auch sagen, dass es zu je zwei $e, e' \in E$ ein $g \in G$ gibt, so dass $ge = e'$. Man merke auch, dass $Ge = E$ genau dann für irgendein $e \in E$ hält, wenn es für alle $e \in E$ hält. Eine andere Art und Weise dies zu sagen ist, dass eine transitive G-Menge eine G-Menge mit einem Erzeuger ist.

Bei Definition sind also die transitiven G-Untermengen $A \subseteq E$ die Orbite eG, mit $e \in E$.

In Beispiel 1.2.30 hätten wir auch sagen können, dass die Wirkung von G auf G/H transitiv ist.

Proposition 1.2.37. *Jede G-Menge E hat eine eindeutige Zerlegung in transitive G-Mengen, nämlich in deren Orbite.*

Beweis. Da eine transitive Zerlegung einer G-Mengen E, eine Zerlegung in Orbite ist, ist die Eindeutigkeit schon gegeben.

Für die Existenz haben wir somit die G-Menge E in Orbite zu zerlegen. Ein jedes Element $e \in E$ liegt in dessen Orbit Ge. Diese geben aber (wie schon besprochen) eine (disjunkte) Zerlegung und wir sind fertig. □

Proposition 1.2.38. *Eine G-Menge E ist genau dann transitiv, wenn $E \simeq G/G_e$.*

Beweis. Für einen $e \in E$, definiere $\varphi : E/E_e \to E$ durch $\varphi(gG_e) := ge$, $g \in G$. Da aus $gG_e = hG_e$, $gh \in G$ folgt $g^{-1}h \in G_e$, gilt $g^{-1}he = e$ also $ge = he$, was die Wohldefiniertheit von φ beweist. Das selbe Argument (in die umgekehrte Richtung) beweist nun auch Injektivität.

Es gilt $h\varphi(gG_e) = h(ge) = (hg)e = \varphi(hgG_e) = \varphi(h(gG_e))$ für beliebige $h \in G$ und $gG_e \in G/G_e$, was nun auch beweist, dass es ein G-Mengenhomomorphismus ist.

Für ein beliebiges $e' \in E$, besagt die Transitivität von E, dass $e' = ge = \varphi(gG_e)$, für irgendein $g \in G$, was nun auch Surjektivität beweist und wir sind fertig.

Für die andere Seite, sein $\overline{h}, \overline{h'} \in E \simeq G/G_e$. Dann gilt für $g = h'h^{-1}$, dass $g\overline{h} := \overline{gh} = \overline{h'h^{-1}h} = \overline{h'}$ und somit ist die Wirkung transitiv. □

Lemma 1.2.39. *Wenn eine (nichtleere) transitive G-Menge E als $E = A \sqcup B$ geschrieben werden kann, mit A, B G-Mengen, dann muss $A = E$ oder $B = E$ gelten.*

Beweis. Das kann man auch als Korollar von Proposition 1.2.37 folgern. Der direkte Beweis ist wie folgt: Wenn $A = B = \varnothing$, dann muss E leer sein, was ein Widerspruch ist. Sei also $a \in A$. Dann muss (bei Definition einer G-Menge) $Ga \subseteq A$ gelten. Da aber $Ga = Ge = E$ (mit $e \in E$ beliebig) haben wir $A = E$ und wir sind fertig. □

Bemerkung 1.2.40. Wenn man Lemma 1.2.39 mit Proposition 1.2.37 verbindet, haben wir eigentlich gezeigt, dass es eine eindeutige Zerlegung einer jeden G-Menge in "unzerlegbaren" G-Mengen gibt, wobei "unzerlegbare" G-Mengen eben transitiv genannt werden und diese "unzerlegbaren" G-Untermengen sind genau die Orbite dieser Wirkung.

Das Zerlegen in irreduziblen bzw. unzerlegbaren Komponenten ist etwas, was man in der Algebra sehr gerne macht und wird auch im Laufe des Kurses für uns von großer Bedeutung sein. Es wird aber darum gehen, Darstellungen einer Gruppe in irreduziblen (bzw. unzerlegbar) Darstellungen zu zerlegen.

Man hätte hier auch das Wort "irreduzibel" benutzen können, jedoch ist weder noch irreduzibel gebräuchlich, wenn es um G-Mengen geht.

Definition 1.2.41. Eine Wirkung, welches zugleich frei und transitiv ist wird *regulär* genannt. Solche eine G-Menge wird oft auch als ein *Torsor* bezeichnet.

In anderen Worten, eine G-Menge E ist genau dann ein Torsor, wenn für alle $e, e' \in E$ es genau einen $g \in G$ gibt, so dass $e' = ge$. Für Torsore (über Gruppen) gilt folgendes:

Proposition 1.2.42. *Sein E, F G-Torsore und sein $e \in E$, $f \in F$ beliebig. Es gibt genau eine G-Mengenisomorphie $\alpha : E \to F$, sodass $\alpha(e) = f$. Spezifisch gibt es, bis auf Isomorphie, genau einen G-Torsor, was G selber ist (als G-Menge betrachtet).*

Beweis. Wir definieren die Abbildung wie fort: Man sende e auf f. Da ein Torsor quasi ein freies G-Modul mit einem Erzeuger ist, gibt dies eine Isomorphie. Spezifisch: Für ein beliebiges Element $a \in E$, gibt es ein $g \in G$, so dass $a = ge$ (transitiv). Wir senden also a auf gf. Da g eindeutig ist (frei), ist diese Abbildung wohldefiniert. Es ist injektiv, da aus $ge = he$ folgt $g = h$ (frei) und surjektiv, da auch F transitiv ist. □

Bemerkung 1.2.43. Ein Beispiel eines Torsors ist $\mathbb{R}^n$ (z. B., die Fläche), wenn man keinen Punkt als Ursprung erklärt hat.‘

Anmerkung 1.2.44. Falls man schon von Überlagerungsräumen gehört hat, sollte dies gewisse Parallelen aufziehen.

1.2.2 Das Gruppenring $R[G]$

Definition durch Abbildungen Sei G eine Gruppe und R ein kommutativer Ring (mit Einheit). Wir definieren den Ring $R[G]$ als die Menge der Mengenabbildungen $f : G \to R$, so dass $f(g) = 0$ für fasst alle $g \in G$. Mit *fast alle* meinen wir, wie gewohnt, alle außer endlich vielen. Sprich, es gilt

$$R[G] \coloneqq \{f : G \to R \mid f(g) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } g \in G\}.$$

Dies wird das *Gruppenring*, *Gruppenalgebra* oder manchmal auch *Monoidring* genannt (da man es allgemeiner mit einem Monoid machen kann). Die Verknüpfungen sind gegeben durch

$$(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$$

und

$$(f_1 f_2)(g) = \sum_{uv=g} f_1(u) f_2(v) = \sum_{u \in G} f_1(u) f_2(u^{-1} g).$$

Da f_i auf fast allen $u, v \in G$ ausgewertet null ist, macht die Summe Sinn.

Definition durch freie Module Eine alternative Konstruktion ist wie folgt: Man nehme das freie Modul R^d über dem Ring R vom Grad $d = \#|G|$. Im Falle, wenn $R = K$ ein Körper ist, meinen wir den Vektorraum K^d, mit $d = \#|G|$. Die Multiplikation auf die Basiselemente, was die Elemente der Gruppe G sind und daher eine natürliche Verknüpfung haben, setzt sich nun auf das ganze Ring eindeutig fort. Dies wird genau so gemacht, wie man erwarten würde:

$$(a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots)(b_1 g_1 + b_2 g_2 + \cdots) \coloneqq a_1 b_1 g_1^2 + a_1 b_2 g_1 g_2 + \cdots + a_2 b_1 g_1 g_2 + a_2 b_2 g_2^2 + \cdots.$$

Da *fast alle* (also, alle außer endlich vielen) der a_i's, b_i's null sind (da es ein Element eines Vektorraumes ist), wird auch bei dem Produkt fast alle Koeffizienten null sein.

Lemma 1.2.45. *Die zwei Definitionen von $R[G]$ stimmen miteinander überein.*

Beweis. Aufgabe **??**. □

1.2.3 $K[G]$-Module

Im letzten Abschnitt haben wir, mithilfe eines Ringes R, eine (multiplikative) Gruppe G zu einem Ring $R[G]$ gemacht. Wenn nun E eine G-Menge ist, dann kann man auch $R[E]$ definieren, was in natürlicher Weise zu einem $R[G]$-Modul wird.

Definition durch Abbildungen Als Menge ist

$$R[E] = \{\varphi : E \to R \mid \varphi(e) = 0 \text{ für fast alle } e \in E\}$$

und die $R[G]$-Modulstruktur ist gegeben durch

$$(f\varphi)(x) = \sum_{ge=x} f(g)\varphi(e),$$

wobei $f : G \to R$ ein Element von $R[G]$ ist. Addition ist wieder *punktweise* gegeben, sprich

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(e) = \varphi_1(e) + \varphi_2(e)$$

Definition durch freie Module Für eine G-Menge E definieren wir auf dem freien R Modul R^d, mit $d = \#|E|$, eine $R[G]$-Modulstruktur wie folgt:

$$(a_1g_1 + a_2g_2 + \cdots)(b_1e_1 + b_2e_2 + \cdots) = a_1b_1g_1e_1 + a_1b_2g_1e_2 + \cdots + a_2b_1g_2e_1 + a_2b_1g_2e_2 + \cdots.$$

Auch hier ist die Summe wohldefiniert, da wieder fast alle Koeffiziente a_i, b_i null sind. Aufgepasst, dies ist zwar frei als R-Modul, muss aber nicht frei als $R[G]$-Modul sein. (Es wäre frei, wenn E eine freie G-Menge wäre.)

Lemma 1.2.46. *Die Definitionen in den Paragraphen 1.2.3 und 1.2.3 stimmen miteinander überein.*

Beweis. Aufgabe **??**. □

Da R natürlich eine Teilmenge von $R[G]$ ist, ist jedes $R[G]$-Modul durch Einschränkung auch ein R-Modul. Wenn späzifisch also $R = K$ ein Körper ist, dann ist $K[E]$ ein K-Vektorraum, für jede G-Menge E. Es ist das Vektorraum, welches aus der Menge aller formallen K-linearen Kombinationen von E besteht. Anders gesagt, die Elemente von E formen eine K-Basis von $K[E]$. Module dieser Art werden *Permutationsmodule* genannt.

Bemerkung 1.2.47. Wir werden nicht in diese Richtung gehen, aber für eine G-Menge E, nennen wir den $R[G]$-Modul $R[E]/\sim$, wobei $ge \sim e$ für alle $g \in G$, $e \in E$, das Modul der Koninvariante und das Modul $\{e \in R[E] \mid ge = e\}$ das Modul der Invariante. Koinvariante (was allgemeiner definiert werden kann) spielen grob die selbe Rolle in der Modultheorie wie Orbite für G-Mengen. Koinvariante und Invariante stimmen bei Körpern der Charakteristik 0 miteinander überein.

2 Definition und erste Resultate

2.1 Zwei Äquivalente Definitionen

2.1.1 Lineare Darstellung einer Gruppe

Definition 2.1.1. Sei G eine Gruppe. Eine *lineare Darstellung* von G ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$.

In diesem Fall nennen wir V den *Darstellungsraum* von G. Sowohl für die lineare Darstellung wie auch den Darstellungsraum werden wir normalerweise einfach Darstellung sagen, wenn ρ vom Kontext klar ist.

Das heißt, zu jedem Element $g \in G$ assoziieren wir einen Automorphismus $\rho(g) = \rho_g : V \to V$, so dass zu $gh \in G$ die Komposition $\rho_g \circ \rho_h$ assoziiert wird. Es folgt direkt, dass zu $1 \in G$, die Identität $\mathsf{Id} : V \to V$ und zu g^{-1} das Inverse $\rho_g^{-1} : V \to V$ korrespondiert. In andern Worten, es gilt $\rho_1 = \mathsf{Id}$ und $\rho_{g^{-1}} = \rho_g^{-1}$.

Definition 2.1.2. Sein $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ und $\sigma : G \to \mathrm{Gl}(W)$ zwei Darstellungen der selben Gruppe G. Ein *Homomorphismus* von der Darstellung ρ nach σ ist ein K-Vektorraumhomomorphismus $f : V \to W$, so dass für jeden $g \in G$, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ {\scriptstyle \rho_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_g} \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

kommutiert: Sprich $\sigma_g \circ f = f \circ \rho_g$. Es heißt *Isomorphismus* wenn es eine Bijektion ist.

Bemerkung 2.1.3. Vorsicht! Dies ist nicht das selbe wie ein Gruppenhomomorphismus $\alpha : \mathrm{Gl}(V) \to \mathrm{Gl}(W)$, so dass $\alpha \circ \rho = \sigma$. Obwohl dies auch eine "natürliche" Definition wäre, ist es nicht wie ein Homomorphismus von Darstellungen definiert wird und auch nicht dazu äquivalent.

Lemma 2.1.4. *Das Inverse von einem Homomorphismus von Darstellungen ist ein Homomorphismus von Darstellungen.*

Beweis. Aufgabe **??**. □

Lemma 2.1.5. *Zwei Darstellungen $\sigma : G \to \mathrm{Gl}(V)$ und $\rho : G \to \mathrm{Gl}(W)$ sind genau dann isomorph, wenn es einen K-Vektorraumisomorphismus $f : V \to W$ gibt, so dass für jeden $g \in G$,*

$$\sigma_g = f \rho_g f^{-1}.$$

Beweis. Wie in Definition 2.1.2 gesagt, $f : V \to W$ ist ein Darstellungshomomorphismus, wenn $\sigma_g \circ f = f \circ \rho_g$. Es ist genau dann ein Isomorphismus, wenn es ein Iverses f^{-1} hat, was uns nun

$$\sigma_g = \sigma_g \circ f \circ f^{-1} = f \circ \rho_g \circ f^{-1}$$

gibt. Dies impliziert nun auch, dass $V \simeq W$ isomorph sind als Vektorräume. □

2.1.2 G-Modul

Definition 2.1.6. Ein G-Modul ist ein K-Vektorraum V, zusammen mit einer Abbildung

$$G \times V \to V, \quad (g, v) \mapsto gv,$$

so dass

i) $g(v_1 + v_2) = gv_1 + gv_2$,

ii) $g(kv) = k(gv)$,

iii) $1v = v$,

iv) $(gh)v = g(hv)$,

wobei $g, h \in G$, $v_1, v_2 \in V$ und $k \in K$ beliebig sind.

Wir werden normalerweise einfach nur V als das G-Modul bezeichnen.

Definition 2.1.7. Ein G-Modulhomomorphismus ist ein K-Vektorraumhomomorphismus $f : V \to W$, so dass

$$f(gv) = gf(v).$$

Dies kann man auch als die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} G \times V & \longrightarrow & V \\ {\scriptstyle (\mathrm{Id}, f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ G \times W & \longrightarrow & W. \end{array}$$

ausdrücken.

Proposition 2.1.8. *Zu sagen, dass V ein G-Modul ist äquivalent zu sagen, dass V ein $K[G]$-Modul ist (im Sinne von Definition 1.2.1). Des weiteren sind G-Modulhomomorphismen genau die $K[G]$-Modulhomomorphismen.*

Beweis. Aufgabe **??** □

2.1.3 Äquivalenz zwischen G-Modulen und Darstellungen

Lemma 2.1.9. *Sein G eine Gruppe und V ein G-Modul. Die Abbildung*

$$\rho_g : V \to V \quad \text{gegeben durch} \quad v \mapsto gv$$

ist ein K-Vektorraumisomorphismus.

Beweis. Es gilt $g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2)$ und $g(kv) = (gk)v = (kg)$ □

Proposition 2.1.10. *Sei V ein G-Modul und für jeden $g \in G$, definiere $\rho_g : V \to V$ durch $v \mapsto gv$. Dies gibt eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$, wobei $g \mapsto \rho_g$.*

Beweis. Laut Lemma 2.1.9 ist $\rho_g \in Gl(V)$. Es bleibt zu beweisen, dass die Zuordnung $G \to \mathrm{Gl}(V)$, $g \mapsto \rho_g$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Sein $g, h \in G$ und betrachte

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\rho_g \circ \rho_h}{\frown} & & \\ V & \xrightarrow{\rho_h} & V & \xrightarrow{\rho_g} & V \\ v & \longmapsto & hv & \longmapsto & g(hv). \end{array}$$

Die vierte Eigenschaft eines G-Moduls besagt, dass $g(hv) = (gh)v$ und damit gilt nun $\rho_g\rho_h := \rho_g \circ \rho_h(v) = \rho_{gh}(v)$ für alle $v \in V$. Damit ist also $\rho_g\rho_h = \rho_{gh}$ und die Abbildung ist somit ein Gruppenhomomorphismus, was uns eine Darstellung liefert. □

Proposition 2.1.11. *Sei $\rho : G \to V$ eine Darstellung. Die Abbildung $G \times V \to V$, gegeben durch $(g, v) \mapsto \rho_g(v)$, definiert eine G-Modul Struktur auf V.*

Beweis. Es gilt zu prüfen, dass die 4 Eigenschaften von Definition 2.1.6 erfüllt werden, für die Abbildung $G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto \rho_g(v) := gv$. Es gilt

i) $g(v_1 + v_2) = \rho_g(v_1 + v_2) = \rho_g(v_1) + \rho_g(v_2) = g(v_1) + g(v_2)$.
ii) $g(kv) = \rho_g(kv) = k\rho_g(v) = k(gv)$.
iii) $1v = \rho_1(v) = \mathsf{Id}(v) = v$.
iv) $(gh)v = \rho_{gh}(v) = \rho_g \circ \rho_h(v) = \rho_g(\rho_h(v)) = \rho_g(hv) = g(hv)$.

Wie haben in den ersten zwei Gleichungen die Tatsache benutzt, dass $\rho_g \in \mathrm{Gl}(V)$ also ein K-Vektorraumhomomorphismus ist. Gleichungen drei und vier kommen von der Tatsache, dass die Abbildung $G \to \mathrm{Gl}(V)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. □

Satz 2.1.12. *Die Zuordnungen zwischen G-Modulen und Darstellungen von G, gegeben in Propositionen 2.1.10 und 2.1.11, sind invers zueinander. Des weiteren induzieren diese auf der Menge der Homomorphismen zwischen zwei G-Modulen, bzw. Darstellungen einen Isomorphismus.*

Beweis. Sei $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ eine Darstellung und $\Phi_\rho : G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto \rho_g(v) := gv$ die dazugehörige G-Modulstruktur. Für jeden $g \in G$ ist die Abbildung $V \to V$ gegeben durch $v \mapsto gv = \rho_g(v)$, was die Ursprüngliche Abbildung ist.

Auf der anderen Seite, sei $\Phi : G \times V \to V$ eine G-Modulstruktur und $\rho_\Phi : G \to \mathrm{Gl}(V)$ die erhaltene Darstellung, mit $(\rho_\Phi)_g : V \to V$ definiert durch $v \mapsto gv = \Phi(g, v)$. Die dadurch gegebene G-Modulstruktur ist nun $G \times V \to V$, $(g, v) \mapsto (\Phi_\rho)_g(v) = \Phi(g, v)$. Als solches erhalten wir Φ zurück.

Da $\rho_g(v)$ bei Definition das selbe wie gv und $\sigma_g(w) = gw$, ist, gilt

$$f(gv) = gf(v) \iff f(\rho_g(v)) = \sigma_g(f(v)) \iff (f \circ \rho_g)(v) = (\sigma_g \circ f)(v).$$

□

Anmerkung 2.1.13. Worum es in Satz 2.1.12 eigentlich geht ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Bemerkung 2.1.14. Wir werden ab jetzt keinen Unterschied mehr zwischen G-Modulen und K-linearen Darstellungen von G machen.

Die Isomorphie $\mathrm{Gl}_n \simeq \mathrm{Gl}(V)$ Wir erinnern uns an Proposition 1.1.5. Als solches kann eine Darstellung als ein Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Gl}_n$ gedacht werden. Die Dimension $\dim(V) = n$ eines endlichen Vektorraums wird auch der *Grad* einer Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ genannt, geschrieben $\mathsf{grad}(\rho) = n$.

Sei $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis eines n-dimensionalen Vektorraumes, G eine Gruppe und $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ eine Darstellung. Sei R_s die zu ρ_s, zugehörige Matrix in der Basis $\mathcal{B}$. Wie schon erwähnt gilt

$$\det(R_s) \neq 0, \quad \text{und} \quad R_{st} = R_s R_t, \ r, s \in G.$$

Wenn $(r_{ij}(s))$ die Einträge der Matrix R_s sind, dann sagt die obige Formel, das wir

$$r_{ik}(st) = \sum_j r_{ij}(s) r_{jk}(t)$$

haben. Dies gilt auch in die umgekehrte Richtung: Eine Kollektion von $n \times n$ Matrizen $\{R_g \mid g \in G\}$, indexiert mit einer Gruppe G, so dass $R_{st} = R_s R_t$, gibt uns eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$, was durch $g \mapsto \rho_g$ gegeben wird, wobei $\rho_g : V \to V$ das zu R_g korrespondierende K-Vektorraumhomomorphismus ist. In diesem Fall sagen wir, dass eine Darstellung *in Matrix Form* Gegeben ist.

Beispiele

Beispiel 2.1.15 (Triviale Darstellung). Für jede Gruppe und jeden Vektorraum V haben wir die triviale Darstellung, was die Abbildung $G \to \mathrm{Gl}(V)$, gegeben durch $g \mapsto \mathsf{Id} : V \to V$ ist. In anderen Worten, zu jedem Element der Gruppe G assoziieren wir die Identitätsabbildung von V in sich selbst.

In Matrizen ausgedrückt wäre dies $g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 1 & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots 1 \end{pmatrix}$.

Als G-Modul wäre $G \times V \to V$ gegeben durch $(g, v) \mapsto v$, also die Abbildung, welches G nicht beeinflusst.

Beispiel 2.1.16 (Darstellung vom Grad 1). Eine Darstellung vom Grad 1 einer beliebigen Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to \mathrm{Gl}(K)$. Da aber $\mathrm{Gl}(K) \simeq K^*$, reduziert sich eine Darstellung vom Grad 1 zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\rho : G \to K^*,$$

wobei K^* die multiplikative Gruppe der Einheiten (sprich Elemente ungleich Null) von K ist. Wenn zusätzlich die Gruppe endlich ist (vom Rank $|G| = n$), dann gilt $\rho(g)^n = 1$, für jeden $g \in G$. Wenn, des weiteren, unser Körper ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist (was bei uns auch immer der Fall sein wird), dann gilt $|\rho(g)| = 1$, wobei $|.|$ die (komplexe) Norm bezeichnet.

Beispiel 2.1.17 (Darstellung der trivialen Gruppe). In dem Fall, wenn $G = 1$ die triviale Gruppe ist (spricht, die Gruppe, dessen einziges Element die Identität ist), dann ist die triviale Darstellung die einzige Darstellung.

Wir behaupten, dass die Isomorphieklassen der Darstellungen von $G = 1$ durch $\mathbb{N}$ gegeben sind, wobei zu $n \in \mathbb{N}$ die Darstellung $1 \to \mathrm{Gl}_n(K)$ assoziiert wird. In anderen Worten, wir behaupten, dass zwei Darstellungen $\sigma : 1 \to \mathrm{Gl}(V)$, $\rho : 1 \to \mathrm{Gl}(W)$ genau dann isomorph sind (als Darstellungen), wenn V und W als K-Vektorräume isomorph sind. Eine Seite ist trivial: wenn $V \not\simeq W$ dann können sie auch nicht isomorph sein als Darstellungen (dies ist immer der Fall, sie Lemma 2.1.5). Auf der anderen Seite, wenn $f : V \to W$ ein K-Vektorraumisomorphismus ist, dann wird $\mathsf{Id} \circ f = f \circ \mathsf{Id}$ gelten und es wird somit ein Darstellungsisomorphismus sein (da $\sigma_1 = \rho_1 = \mathsf{Id}$).

Beispiel 2.1.18 (Zyklische Gruppe mit 2 Elementen). Sei $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, t \mid t^2 = 1\}$, die Gruppe mit zwei Elementen. Da eine Darstellung ein Gruppenhomomorphismus ist, muss $1 \mapsto \mathsf{Id} : V \to V$ immer gelten. Bei t jedoch gilt $t \mapsto \alpha : V \to V$, so dass $\alpha^2 = \mathsf{Id}$. Es ist nun klar, dass die Menge solcher Abbildung von V in sich selbst (was *Involutionen* genannt werden) und Darstellung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ in eine einz-zu-einz Relation stehen.

Wir behaupten, dass die Isomorphieklassen durch $\mathbb{N}^2$ festgelegt werden, wobei zu $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, wir die Darstellung $\rho : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}_{n+m}K$ assoziieren, welches durch

$$\rho_t(e_i) = \begin{cases} e_i & 1 \le i \le n \\ -e_i & n+1 \le i \le n+m \end{cases}$$

gegeben ist. In Matrixsprache wäre dies

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hier sind die e_i, $1 \le n+m$ die Basiselemente von K^{n+m}. Die Abbildung ρ_1 ist wie immer die Identität. Es ist einfach, sich zu überzeugen, dass dies ein Darstellungshomomorphismus ist. Wir wollen nun beweisen, dass jede Darstellung isomorph zu einem dieser Darstellungen ist. Sei daher $\rho : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}(V)$ eine Darstellung. Betrachte den Untervektorraum

$$V_+ := \{v \mid \rho_t(v) = v\} \subseteq V,$$

sprich, das größte Untervektorraum auf dem beschränkt ρ zur Identität wird. Gleichwie definieren wir

$$V_- := \{v \mid \rho_t(v) = -v\}.$$

Wir behaupten, dass $V \simeq V_+ \oplus V_-$. Sei $v \in V$ und definiere $v_+ := \frac{v+\rho_t(v)}{2} \in V_+, v_- := \frac{v-\rho_t(v)}{2} \in V_-$. Da ρ_t ein K-Vektorraumhomomorphismus ist, gilt $\rho_t(v_+) = \frac{\rho_t(v)+\rho_t^2(v)}{2} = v_+$ und $\rho_t(v_-) = \frac{\rho_t(v)-\rho_t^2(v)}{2} = -v_-$, wobei die jeweils letzte Gleichung gelten, da $\rho_t^2 = \mathsf{Id}$. Des weiteren gilt auch $v = v_+ + v_-$, was somit zeigt, dass jedes $v \in V$ als $v = v_+ + v_-$, mit $v_+ \in V_+$ und $v_- \in V_-$ geschrieben werden kann. Da klar $V_+ \cap V_- = \varnothing$, folgt $V \simeq V_+ \oplus V_-$, wie gewollt. Indem wir nun $n = \dim(V_+)$ und $m = \dim(V_-)$ nehmen, haben wir nun bewiesen, dass die Darstellung von der gewollten Form ist. (Natürlich nur bis auf Isomorphie, da wir V_+ mit K^n und V_- mit K^m identifizieren.)

Beispiel 2.1.19 (S_3). Sei S_3 die Menge der Bijektionen der Menge mit drei Elementen. Indem wir $x = (123), y = (12)$ nennen, können wir S_3 als $S_3 = \langle x, y \mid x^3 = 1, y^2 = 1, xy = x^2y \rangle$ beschreiben. Es gilt $S_3 = \{1, x, x^2, y, xy, x^2y\}$. Ein Beispiel einer zweidimensionalen Darstellung ist gegeben durch

$$\rho_x = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \rho_y = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es it ein einfaches zu Überprüfen, dass $A^3 = \mathsf{Id} = B^2$ und $BA = A^2B$, was direkt impliziert, dass es eine Darstellung ist.

Dies ist sogar eine sogenannte irreduzible Darstellung. Dazu wird mehr im Laufe des Kurses besprochen.

2.1.4 Die Zyklischen Gruppen

Wir wollen nun Beispiel 2.1.18 für allgemeine Zyklische Gruppen machen. Sei $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{1, t, \ldots, t^{n-1} \mid t^n = 1\}$, die zyklische Gruppe mit n Elementen. Da unsere Gruppe einen Erzeuger hat und eine Darstellung ein Gruppenhomomorphismus ist, müssen wir nur sagen, wohin $t \in G$ abbildet. Da $t^n = 1$ in G, muss auch $g_t^n = \mathsf{Id}$ gelten, mit $g_t : V \to V$.

Wir behaupten, dass die Isomorphieklassen durch $\mathbb{N}^n$ festgelegt werden. Sei $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ und $k = a_1 + \ldots + a_n$. Wir definieren die Darstellung $\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}_k(K)$, welches durch

$$\rho_t(e_i) = \begin{cases} e_i & 1 \le i \le a_1 \\ \omega_n e_i & a_1 \le i \le a_1 + a_2 \\ \omega_n^2 e_i & a_1 + a_2 \le i \le a_1 + a_2 + a_3 \\ \cdots & \\ \omega_n^{n-1} e_i & a_1 + \cdots + a_{n-1} \le i \le k \end{cases}$$

gegeben ist. Hier ist ω_n eine primitive n-te Wurzel von 1. In Matrixsprache wäre dies

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n, \end{pmatrix}$$

wobei A_j die diagonale $a_j \times a_j$-Matrix ist, mit Diagonaleintrag ω_n^{j-1}. Die e_i, $1 \le k$ sind die Basiselemente von K^k.

Wir wollen nun beweisen, dass jede Darstellung isomorph zu einem dieser Darstellungen ist. Sei daher $\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{Gl}(V)$ eine Darstellung. Betrachte die Untervektorräume

$$V_i := \{v \mid \rho_t(v) = \omega_n^{i-1} v\} \subseteq V.$$

Wir behaupten, dass $V \simeq \bigoplus_{i=1}^n V_i$. Sei $v \in V$ und definiere

$$v_i := \frac{v + \omega_n^{n-i-1}\rho_t(v) + \omega_n^{n-i-2}\rho_t^2(v) + \cdots + \omega_n^{1-i}\rho^{n-1}(v)}{n}.$$

Da ρ_t eine K-lineare Abbildung ist, gilt

$$\begin{aligned} \rho_t(v_i) &= \rho_t\left(\frac{v + \omega_n^{n-i-1}\rho_t(v) + \omega_n^{n-i-2}\rho_t^2(v) + \cdots + \omega_n^{1-i}\rho^{n-1}(v)}{n}\right) \\ &= \frac{\rho_t(v) + \omega_n^{n-i-1}\rho_t^2(v) + \omega_n^{n-i-2}\rho_t^3(v) + \cdots + \omega_n^{1-i} v}{n} \\ &= \omega_n^i v, \end{aligned}$$

da $\omega_n^n = 1$. Des weiteren gilt auch

$$v_1 + \cdots + v_n = \frac{nv + \left(1 + \omega_n + \cdots + \omega_n^{n-1}\right)\rho_t(v) + \cdots + \left(1 + \omega_n + \cdots + \omega_n^{n-1}\right)\rho_t^{n-1} v}{n} = v$$

da $\left(1 + \omega_n + \cdots + \omega_n^{n-1}\right) = 0$. Dies beweist, dass jedes $v \in V$ als $v = v_1 + \cdots + v_n$ geschrieben werden kann, mit $v_i \in V_i$. Da klar $V_i \cap V_j = \varnothing$, das gewünschte Resultat.

2.2 Neue Darstellungen durch Alte

Man habe zwei Darstellungen $\rho_1 : G \to V$ und $\rho_2 : G \to W$ einer Gruppe G fixiert. Für die Vektorräume V, W gibt es viele Möglichkeiten einen Vektorraum zu erstellen. Wir werden hier einige der wichtigsten Konstruktionen wiederholen und dann auf diese neuen Vektorräume eine (kanonische) Darstellung einführen.

Unterdarstellungen

Definition 2.2.1. Sei $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ eine Darstellung einer Gruppe G über einen Vektorraum V und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wenn für alle $g \in G$ und $w \in W$ gilt $\rho_g(w) \in W$, dann nennt man $W \subseteq V$, zusammen mit der induzierten Abbildung $\rho_* : G \to \mathrm{Gl}(W)$ eine *Unterdarstellung*. Normalerweise werden wir einfach W als die Unterdarstellung bezeichnen, da ρ_* explizit durch ρ definiert wird.

2.2.1 Der Bild und das Kern

Definition 2.2.2. Für einen Homomorphismus $f : V \to W$ von Darstellungen einer Gruppe G definieren wir den *Kern* als

$$\mathsf{Ker}(f) = \{v \in V_1 | f(v_1) = 0\}$$

und den *Bild* durch

$$\mathsf{Bild}(f) = \{w \in V_2 | w = f(v_1) \text{ für irgendeinen } v \in V_1\}.$$

Lemma 2.2.3. *Sei $f : V \to W$ ein Darstellungshomomorphismus.*

(a) Der Kern $\mathsf{Ker}(f) \subseteq V_1$ ist eine Unterdarstellung von V_1.

(b) Das Bild $\mathsf{Bild}(f) \subseteq V_2$ ist ein Unterdarstellung von V_2.

Beweis. Aufgabe **??**. □

Lemma 2.2.4. *Eine Darstellungshomomorphismus $f : V \to W$ ist ein genau dann ein Isomorphismus wenn zugleich $\mathsf{Ker}(f) = 0$ und $\mathsf{Bild}(f) = W$.*

Beweis. Es ist klar, dass die Aussage $\mathsf{Bild}(f) = W$ genau die Surjektivität von f bedeutet. Auf der anderen Seite besagt $\mathsf{Ker}(f) = 0$ genau Injektivität. Sprich: $x \in \mathsf{Ker}(f) \Leftrightarrow f(x) = 0 = f(0)$ und aus f injektiv folgt $x = 0$. Umgekehrt folgt aus $\mathsf{Ker}(f) = 0$, dass $f(v_1) = f(v_2) \Leftrightarrow f(v_1 - v_2) = 0$ impliziert $v_1 - v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2$ und daher ist f injektiv. □

2.2.2 Die direkte Summe

Direkte Summe von Vektorräumen Zur Erinnerung, wir definieren die direkte Summe $V \oplus W$ zweier K-Vektorräume als die Menge der Paare (v, w), mit $v \in V$ und $w \in W$. Die K-Vektorraumstruktur wird wie folgt definiert:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$

$$k(v, w) = (kv, kw).$$

Es gilt

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W).$$

Wir erinnern uns an die folgende wichtige Eigenschaft der direkten Summe, welches wir öfter benutzen werden:

Lemma 2.2.5. *Sein U und W Untervektorräume eines K-Vektorraumes V, so dass $U \cap W = \{0\}$ und jedes vektor $v \in V$ eine Darstellung der Form $v = u + w$ hat, wobei $u \in U$ und $w \in W$. Die Abbildung $U \oplus W \to V$, gegeben durch*

$$(u, w) \mapsto u + w$$

ist ein Isomorphismus.

Es folgt direkt auch, dass $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$. In diesem Fall werden wir öfters einfach nur $V = U \oplus W$ schreiben. Dies ist äquivalent zu sagen, dass jedes Element v *eindeutig* als $v = u + w$ geschrieben werden kann.

Lemma 2.2.6. *Sei W ein Unterraum eines Vektorraumes V. Es gibt ein Unterraum U von V, so dass $W \oplus U \xrightarrow{\sim} V$ isomorph sind.*

Proof. Man wähle eine Basis $v_1, \cdots, v_k$ von U und setze es zu einer Basis von V fort. Sei W das Unterraum von V, welches von den Elementen $v_{k+1}, \cdots, v_n$ erzeugt wird. Dann erfüllt W die Bedingung von Lemma 2.2.5 und wir sind fertig. □

Wenn wir Automorphismen $\alpha : V \to V$ und $\beta : W \to W$ haben, dann ist $\alpha \oplus \beta : V \oplus W \to V \oplus W$ durch

$$(v, w) \mapsto (\alpha(v), \beta(w))$$

gegeben. In Matrixform ist dies durch

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei A zu α und B zu β korrespondieren. Wenn A eine $n \times n$ Matrix und B eine $m \times m$ Matrix sind, dann ist $A \oplus B$ eine $(n+m) \times (n+m)$ Matrix.

Direkte Summe von Darstellungen Wir definieren die *direkte Summe* der Darstellungen durch die Wirkung

$$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to V \oplus W,$$

mit

$$g(v, w) = (gv, gw)$$

und bezeichnen es einfach als $V \oplus W$.

2.2.3 Das Tensorprodukt

Definition 2.2.7. Sein V, W zwei Vektorräume mit Basen $\{e_1, \cdots, e_k\}$ und $\{e'_1, \cdots e'_m\}$ respektive. Das Vektorraum erzeugt mit den Symbolen $\{e_i \otimes, e'_j\}_{i=1,\cdots,k, j=1,\cdots,m}$ sei mit $U \otimes V$ beschriftet.

Wir definieren eine Abbildung $V \times W \to V \otimes W$, welches die Basiselemente $e_i \in V$ auf $e_i \otimes 0$ und $e'_i \in W$ auf $0 \otimes e'_i$ abbildet. Das Bild eines Elements (u, v) unter dieser Abbildung wird durch $u \otimes v$ beschriftet.

Das Vektorraum $V \otimes W$ von Definition 2.2.7 wird das *Tensorprodukt* von V und W genannt. Manchmal wird dies auch als das *Kroneckerprodukt* bezeichnet. Von der letzten Eigenschaft folgt direkt, dass $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \dim(W)$.

Bemerkung 2.2.8. Da dies ein Gruppenhomomorphismus ist gilt natürlich

$$(u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v,$$

$$u \otimes (v_1 + v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2,$$

$$u \otimes \lambda v = \lambda u \otimes v = \lambda(u \otimes v).$$

Bemerkung 2.2.9. Es sollte gesagt werden, dass das Tensorprodukt nicht vom Wahl der Basen abhängt. Es kann auch für Module definiert wird. Dies könnte man machen, indem man den Vektorraum erzeugt mit allen Möglichen $u \otimes v$ aufspannt und dann den erhaltenen Vektorraum durch die Gleichungen in Bemerkung 2.2.8 teilt.

Der Grund warum wir es nicht so definiert haben ist, dass man dann z.B., zeigen muss, dass die Dimension (im Falle von Vektorräumen) gleich $\dim(V) \times \dim(W)$ ist. In unserer Konstruktion ist dies trivialerweise der Fall.

Sein $\alpha : V \to V$ und $\beta : W \to W$ Automorphismen, mit A und B als zugehörige Matrizen. Dann ist $\alpha \otimes \beta : V \otimes W \to V \otimes W$ durch

$$v \otimes w \mapsto \alpha(v) \otimes \beta(w)$$

gegeben. Wenn $A = \{a_{ij}\}$ und $B = \{b_{ij}\}$, dann ist $A \otimes B$ durch

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & & a_{1n}B \\ & \cdots & \\ a_{n1}B & & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

definiert. Wenn A und B $n \times n$, respektive $m \times m$ Matrizen sind, dann ist $A \otimes B$ eine $mn \times mn$ Matrix.

Tensorprodukt von Darstellungen Wir definieren den *Tensorprodukt von Darstellungen*

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \times V \otimes W \to V \otimes W$$

durch

$$g(v \otimes w) = (gv) \otimes (gw).$$

Dies wird mit $V \otimes W$ bezeichnet.

Lemma 2.2.10. *Das Tensorprodukt von Darstellungen ist wieder eine Darstellung.*

Beweis. Aufgabe. □

2.2.4 Die Homomorphismenmenge

Sein V und W Vektorräume von Dimension n respektive m. Wir definieren

$$\mathsf{Hom}(V, W) \coloneqq \mathsf{Hom}_{K\text{-Vekt}}(V, W)$$

als die Menge aller K-Vektorraumhomomorphismen von V nach W. Dies hat selber eine K-Vektorraumstruktur wie folgt: Sein $f, g \in \mathsf{Hom}(V, W), k \in K$ und $v \in V$. Es ist eine abelsche Gruppe unter der Verknüpfung

$$(f + g)(v) \coloneqq f(v) + g(v)$$

(mit der Nullabbildung $(v \mapsto 0)$ als die Einheit/Identität). Dies ist selber eine K-lineare Abbildung, da

$$\begin{aligned}(f+g)(v+w) &= f(v+w) + g(v+w)\\ &= f(v) + f(w) + g(v) + g(w)\\ &= (f+g)(v) + (f+g)(w)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(f+g)(kx) &= f(kx) + g(kx)\\ &= kf(x) + kg(x)\\ &= k(f+g)(x).\end{aligned}$$

Wir können auch mit einem Skalar multiplizieren indem wir

$$(kf)(v) \coloneqq kf(v) = f(kv)$$

definieren. Die zweite Gleichung gilt da f bei Annahme K-linear ist. Es ist einfach zu überprüfen, dass auch diese neue Abbildung K-linear ist. Als solches hat $\mathsf{Hom}(V, W)$ eine natürliche K-Vektorraumstruktur.

Lemma 2.2.11. *Sein V und W von Dimension n und m respektive. Es gilt* $\dim(\mathsf{Hom}(V, W)) = nm$.

Beweis. Sein $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$ und man wähle sich Basen $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ und $\mathcal{C} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ von V und W respektive. Für $f : V \to W$ haben wir die korrespondierende $m \times n$-Matrix $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$. Diese Zuordnung

$$f \mapsto Mat_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$$

gibt uns eine Isomorphie

$$\mathsf{Hom}(V, W) \simeq \mathrm{Mat}_{m,n},$$

woraus die gewünsche Formel für die Dimensionen folgt. □

Bemerkung 2.2.12. Es folgt direkt, dass $\mathsf{Hom}(V,W) \simeq V \otimes W$ ist. Mann sollte diese zwei Vektorräume jedoch nicht ganz gleichsetzen.

Lemma 2.2.13. *Sein U, V und W Vektorräume. Es gibt Isomorphien*

$$\phi : \mathsf{Hom}(U \oplus V, W) \to \mathsf{Hom}(U,W) \oplus \mathsf{Hom}(V,W)$$

und

$$\psi : \mathsf{Hom}(U, V \oplus W) \to \mathsf{Hom}(U,V) \oplus \mathsf{Hom}(U,W).$$

Beweis. Die Isomorphien sind wie folgt gegeben: Für $f : U \oplus V \to W$ und $g : U \to V \oplus W$ definieren wir

$$\phi(f) = (f_1, f_2) \quad \text{und} \quad \psi(g) = (g_1, g_2),$$

wobei $f_1 : U \to W, f_2 : V \to W, g_1 : U \to V, g_2 : V \to W$ durch

$$f_1(u) = f(u,0);\ f_2(v) = f(0,v); g(u) = (g_1(u), g_2(u))$$

gegeben sind. Es ist ein einfaches zu überprüfen, dass diese Vektorraumhomomorphismen sind. □

Lemma 2.2.14. *Sein U, V und W Vektorräume. Die Abbildung*

$$\xi : \mathsf{Hom}(U \otimes V, W) \to \mathsf{Hom}(U, \mathsf{Hom}(V,W)),$$

gegeben durch

$$\xi(f)(u)(v) \coloneqq f(u \otimes w)$$

mit $f : U \otimes V \to W$ ist eine Isomorphie.

Beweis. Aufgabe **??** □

Bemerkung 2.2.15. Lemma 2.2.14 ist eine sehr wichtige Eigenschaft, dass auch für Module gilt. Es besagt, dass das Tensorprodukt und Hom *adjungiert* sind.

Die Homomorphismenmenge als eine Darstellung Wir definieren eine G-Modulstruktur auf $\mathsf{Hom}(V,W)$ indem wir $gf : V \to W$ durch

$$(gf)(v) \coloneqq gf(g^{-1}v) \tag{1}$$

definieren, wobei $g \in G, v \in V$ und $f \in \mathsf{Hom}(V,W)$.

Lemma 2.2.16. *Dies definiert eine G-Modulstruktur.*

Beweis. Aufgabe **??** □

Die duale Darstellung Ein spezieller Fall der Darstellung $\mathsf{Hom}(V,W)$ ist von besonderer Bedeutung: Wenn $W = K$ die triviale Darstellung ist (sprich, $G \times K \to K$, gegeben durch $(g,k) = k$, oder anders $G \to \mathrm{Gl}(K)$ gegeben durch $g \mapsto \mathsf{Id} : K \to K$), dann nennen wir die Darstellung von $\mathsf{Hom}(V,K)$ die *duale Darstellung*. Es wird durch V^* bezeichnet.

Wie es von Lemma 2.2.11 folgt, ist $\dim(V^*) = \dim(V)$. Als solches korrespondiert eine $n \times n$ Matrix dazu: Sprich, die Darstellung von V^* kann durch eine Abbildung $\rho^* : G \to \mathrm{Gl}_n$ gegeben werden. Hier gilt $\rho^*(g) = (\rho(g))^*$, wobei $A^* = (A^{-1})^T$ die Transponierte des Inversen der zu $\rho : G \to \mathrm{Gl}_n(K)$ korrespondierende Matrix ist.

Lemma 2.2.17. *Es gibt eine Isomorphie von Darstellungen $\mathsf{Hom}(V,W) \simeq V^* \otimes W$.*

Beweis. Aufgabe **??**. □

2.3 Der Satz von Maschke

Ab hier gilt $\mathsf{char}(K) = 0$. Wir wollen nun Lemma 2.2.6 für Darstellungen beweisen. Das Problem ist jedoch, dass die dort partizipirenden Abbildungen (einschließlich der Isomorphie) keine Darstellungshomomorphismsen sind. Wir werden dies mithilfe der folgenden Konstruktion lösen können.

2.3.1 Mittelwert einer Abbildung

Proposition 2.3.1. *Sein V und W zwei G-Module und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.*

i) Die Abbildung

$$M_f : V \to W,$$

definiert durch

$$M_f(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gf(g^{-1}v)$$

ist ein Darstellungshomomorphismus. Wir bezeichnen mit $|G|$ die Anzahl der Elemente der Gruppe G.

ii) Wenn f selber schon ein Darstellungshomomorphismus war, dann gilt $M_f = f$.

Beweis. i) Es gilt zu beweisen, dass für alle $h \in G$, $v \in V$ gilt $M_f(hv) = hM_f(v)$. Wir haben

$$M_f(hv) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gf(g^{-1}hv).$$

Indem wir g mit hy (wobei $y = h^{-1}g$) bezeichnen, erhalten wir

$$gf(g^{-1}hv) = hyf(y^{-1}v).$$

Lasse g und h durch alle Elemente von G durchlaufen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} M_f(hv) &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} hyf(y^{-1}v) \\ &= h\left(\frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} yf(y^{-1}v) \right) \\ &= hM_f(v). \end{aligned}$$

ii) Es gilt

$$\begin{aligned} M_f(v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gf(g^{-1}v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gg^{-1}f(v) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(v) \\ &= \frac{f(v)}{|G|} \sum_{g \in G} 1 \\ &= f(v). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.2. Man vergleiche die obige Formel mit (1).

2.3.2 Projektionen

Definition 2.3.3. Eine lineare Abbildung $p : V \to V$ heißt eine *Projektion* (oder manchmal auch ein *Idempotent*), wenn $p^2 = p$.

Gleichwie wird eine $n \times n$-Matrix A eine Projektion genannt, wenn $A^2 = A$.

Lemma 2.3.4. *Sei $V = U \oplus W$. Die lineare Abbildung $p_U : V \to U$, definiert durch $p_U(u, w) = (u, 0)$, ist eine Projektion und es gilt*

$$\mathsf{Ker}(p_U) = W \quad \text{und} \quad \mathsf{Bild}(p_U) = U.$$

Beweis. Es ist eine Projektion, da

$$p_U(p_U(u, w)) = p_U(u, 0) = (u, 0) = p_U(u, w).$$

Es gilt

$$\mathsf{Ker}(p_U) = \{(u, w) \in U \oplus W \mid p_U(u, w) = 0\} = \{(u, w) \in U \oplus W \mid (u, 0) = 0\} = \{(0, w) \mid w \in W\} \simeq W$$

und

$$\mathsf{Bild}(p_U) = \{p_U(u, w) \mid u \in U, w \in W\} = \{(u, 0) \mid u \in U\} \simeq U.$$

□

Lemma 2.3.5. *Sei $p : V \to V$ eine Projection. Dann ist*

$$q := \mathsf{Id} - p : V \to V$$

auch eine Projektion und es gilt $pq = qp = 0$. Als solches hat man eine Dekomposition

$$V = \mathsf{Ker}(p) \oplus \mathsf{Ker}(q)$$

und es gilt $\mathsf{Bild}(p) = \mathsf{Ker}(q)$.

Beweis. Es ist direkt klar, dass

$$q^2 = (\mathsf{Id} - p)^2 = \mathsf{Id} - 2p + p^2 = \mathsf{Id} - 2p + p = \mathsf{Id} - p = q.$$

Des weiteren gilt

$$pq = p(\mathsf{Id} - p) = p - p^2 = p - p = 0.$$

Gleichwie ist auch $qp = 0$. Sei $x \in \mathsf{Ker}(q)$, sprich $q(x) = 0$, also $x - p(x) = 0$. Damit ist $x = p(x) \in \mathsf{Bild}(p)$ und somit gilt $\mathsf{Ker}(q) \subseteq \mathsf{Bild}(p)$. Auf der andren Seite bedeutet $x \in \mathsf{Bild}(p)$, dass $x = p(y)$ für einen $y \in V$. Da $p^2 = p$, folgt $x = p(y) = p^2(y) = p(p(y)) = p(x)$. Als solches gilt $q(x) = x - p(x) = 0$ und es folgt $\mathsf{Bild}(p) \subseteq \mathsf{Ker}(q)$. Somit gilt $\mathsf{Ker}(q) = \mathsf{Bild}(p)$. Um zu beweisen, dass wir eine Zerlegung in eine direkte Summe haben, müssen wir, laut Lemma 2.2.5 nur beweisen, dass

$$\mathsf{Ker}(p) \cap \mathsf{Ker}(q) = \{0\}$$

und

$$V = \mathsf{Ker}(p) + \mathsf{Ker}(q).$$

Sei $x \in \mathsf{Ker}(p) \cap \mathsf{Ker}(q)$, sprich $p(x) = 0 = q(x)$, woraus $0 = q(x) = x - p(x) = x - 0 = x$ und daher die erste Gleichung folgt.

Für die Zweite, schreibe $v \in V$ als $v = u + w$, wobei $u = v - p(v)$ und $w = p(v)$. Da

$$p(u) = p(v - p(v)) = p(v) - p(p(v)) = p(v) - p(v) = 0$$

gilt $u \in \mathsf{Ker}(p)$ und wir haben schon gezeigt, dass $\mathsf{Ker}(q) = \mathsf{Bild}(p) \ni p(v) = w$. Die gewünschte Zerlegung folgt. □

Bemerkung 2.3.6. Sei V eine Darstellung einer Gruppe G und $p : V \to V$ eine Projektion. Dann muss p nicht zwangsweise ein Darstellungshomomorphismus sein.

Lemma 2.3.7. *Sei $p : V \to V$ eine Projektion, was zusätzlich ein Darstellungshomomorphismus ist. Dann ist*

$$q := \mathsf{Id} - p$$

auch ein Darstellungshomomorphismus (und Projektion).

Beweis. Wir haben schon bewiesen, dass es eine Projektion ist. Es gilt

$$q(gv) = gv - p(gv) = gv - gp(v) = g(v - p(v)) = gq(v).$$

□

Korollar 2.3.8. *Sei $p : V \to V$ eine Projektion, was zugleich ein Darstellungshomomorphismus ist. Dann gibt es eine Zerlegung $V \simeq \mathsf{Ker}(p) \oplus \mathsf{Bild}(p)$ von Darstellungen.*

Beweis. Lemma 2.3.5 besagt, dass $f : V \xrightarrow{\sim} \mathsf{Bild}(p) \oplus \mathsf{Ker}(p) = \mathsf{Ker}(q) \oplus \mathsf{Ker}(p)$. Dass das Bild und Kern einer Darstellung Unterdarstellungen sind, ist Lemma 2.2.3. Es bleibt noch zu beweisen, dass die Isomorphie, was durch

$$v \mapsto (q(v), p(v))$$

gegeben ist, ein Darstellungshomomorphismus ist. Wie gewohnt ist $q(v) = \mathsf{Id} - p(v)$. Es gilt

$$f(gv) = (q(gv), p(gv)) = (gq(v)gp(v)) = g(q(v), p(v)) = gf(v),$$

da laut Lemma 2.3.7 auch q ein Darstellungshomomorphismus ist. □

Zur Erinnerung, die Spur einer Matrix wird definiert als die Summer der Diagonaleinträge.

Lemma 2.3.9. *Sei $p : V \to V$ eine Projektion. Dann gilt*

$$\dim(\mathsf{Bild}(p)) = \mathsf{Sp}(p).$$

Beweis. Sein $\dim(V) = n$, $\dim(\mathsf{Bild}(p)) = k$ und $v_1, \cdots, v_r$ eine Basis von $\mathsf{Ker}(p)$. Lemma 2.3.5 besagt, dass $\dim(\mathsf{Ker}(p)) = r = n - k$. Man nehme eine Basis $v_{r+1}, \cdots, v_n$ des Bildes $\mathsf{Bild}(p)$. Dann ist $v_1, \cdots, v_n$ eine Basis von V, laut Lemma 2.3.5. Sei $v \in \mathsf{Bild}(p)$, sprich $v = p(w)$, für irgendein $w \in V$. Weil p eine Projektion ist gilt $p(v) = p(p(w)) = p(w) = v$. Es folgt, dass für die zu p korrespondierende Matrix, in dieser Basis

$$\begin{pmatrix} \mathsf{Id}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Als solches gilt $\mathsf{Sp}(p) = \mathsf{Sp}(\mathsf{Id}_k) = k$ und die Aussage folgt. □

Satz 2.3.10. *(Maschke) Sei W eine Unterdarstellung einer Darstellung V. Es gibt eine Unterdarstellung U von V, so dass*

$$W \oplus U \xrightarrow{\sim} V$$

isomorph als Darstellungen sind.

Beweis. Laut Lemma 2.2.6 gibt es einen Untervektorraum U', so dass $U' \oplus W \simeq V$ als Vektorräume. Dies impliziert direkt, dass jedes Element $v \in V$ eindeutig als eine Summe $v = w + u'$, mit $w \in W$ und $u' \in U'$ dargestellt werden kann. Sei $p' : V \to W$ die Projektion auf W, sprich die Abbildung $p'(v) = w$. Es gilt $p'(v) = v$ genau dann wenn $v \in W$, woraus $(p')^2 = p'$ folgt.

Im Allgemeinen ist die Projektion p' kein Darstellungshomomorphismus. Als solches benutzen wir Proposition 2.3.1 um ein Darstellungshomomorphismus

$$p = M_{p'} : V \to W$$

zu erhalten.

Behauptung 1: $p(w) = w$ für jeden $w \in W$.

Wie schon erwähnt, $p'(w) = w$ für alle $w \in W$. Da W eine Unterdarstellung von V ist, gilt $g^{-1}w \in W$ wenn $w \in W$, also $p'(g^{-1}w) = g^{-1}w$. Es folgt aus der Definition

$$p(v) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gp'(g^{-1}v),$$

dass

$$p(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gg^{-1}w = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w = w\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1 = w.$$

Behauptung 2: $p^2 = p$.

Zuerst bemerken wir, dass $p'(v) = w \in W$ für jeden $v \in V$, wobei $v = w + u'$ mit $w \in W$ und $u' \in U'$. Da $p'(v) \in W$, folgt $gp'(g^{-1}v) \in W$. Dies impliziert $p(v) \in W$, also $p^2(v) = p(p(v)) = p(v)$, laut Behauptung 1.

Als solches ist p eine Projektion, welches zugleich ein Darstellungshomomorphismus ist. Korollar 2.3.8 gibt uns nun

$$V \simeq W \oplus U,$$

wobei $U = Ker(p)$. □

2.4 Irreduzible Darstellungen

Definition 2.4.1. Eine Darstellung $\rho : G \to V$ heißt *irreduzibel* wenn aus $V \simeq V_1 \oplus V_2$, mit V_i Darstellungen, folgt $V_1 = 0$ oder $V_2 = 0$.

Lemma 2.4.2. *Eine Darstellung vom Grad* 1 *ist immer irreduzibel.*

Beweis. Da $\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$, folgt aus $\dim(V) = 1$ direkt, dass V irreduzibel ist. □

Proposition 2.4.3. *Jede Darstellung V kann als eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_d$$

zerlegt werden.

Beweis. Wir beweisen dies durch Induktion auf $\dim(V)$. Sei $\dim(V) = 1$. Dann ist V irreduzibel. Es gelte nun die Aussage für alle Darstellungen vom Grad streng kleiner als n und sei $\dim(V) = n$. Wenn V irreduzibel, dann sind wir fertig. Sei also V reduzibel. Daher gibt es V_1, V_2 Darstellungen mit $V_i \neq 0$, sprich $\mathsf{grad}(V_i) > 0$, so dass $V = V_1 \oplus V_2$. Es muss nun $\dim(V_i) < n$, $i = 1, 2$ gelten, da $n = \dim(V_1) + \dim(V_2)$. Bei Induktion haben wir $V_1 = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$ und $V_2 = U_1' \oplus \cdots \oplus U_t'$, wobei alle U''s irreduzibel sind. Es folgt, dass

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s \oplus \cdots \oplus U_1' \oplus \cdots \oplus U_t'.$$

wie gewünscht. □

Lemma 2.4.4 (Das Lemma von Schur)**.** *Sein V und W irreduzible Darstellungen und $f : V \to W$ ein Morphismus von Darstellungen.*

i) Dann ist $f = 0$ oder f ist ein Isomorphismus.

ii) Sei $K = \mathbb{C}$ die komplexen Zahlen und gelte $V = W$. Es gibt eine komplexe Zahl λ, so dass

$$f(x) = \lambda x, \quad x \in V.$$

Beweis. i) Laut Lemma 2.2.3 ist $\mathsf{Ker}(f)$ eine Unterdarstellung von V. Der Satz von Maschke 2.3.10 besagt, dass $\mathsf{Ker}(f)$ ein direkter Summand von V ist. Da jedoch V irreduzibel ist, muss entweder $\mathsf{Ker}(f) = V$ oder $\mathsf{Ker}(f) = 0$ sein.

Gleichwie ist nach Lemma 2.2.3 auch $\mathsf{Bild}(f)$ eine Unterdarstellung von W. Wieder besagt Maschkes Satz 2.3.10, dass $\mathsf{Bild}(f)$ ein direkter Summand von W ist. Da aber auch W irreduzibel ist, muss $\mathsf{Bild}(f) = 0$ oder $\mathsf{Bild}(f) = W$ gelten.

Wenn $\mathsf{Ker}(f) = V$ (oder $\mathsf{Bild}(f) = 0$) ist die Abbildung f die Nullabbildung. Wenn $\mathsf{Ker}(f) = 0$ und $\mathsf{Bild}(f) = W$, dann muss f ein Isomorphismus sein.

ii) Da unser zugrundeliegender Körper die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind, hat f ein Eigenwert λ und ein Eigenvektor u. In anderen Worten $f(u) = \lambda u$, $u \neq 0$. Es folgt, dass $\mathsf{Ker}(f - \lambda\mathsf{Id}) \neq \{0\}$. Der erste Teil dieses Lemmas 2.4.4 impliziert $\mathsf{Ker}(f - \lambda\mathsf{Id}) = U$, woraus $f - \lambda\mathsf{Id} = 0$ folgt und wir sind fertig. □

Korollar 2.4.5. *Sei $f : V \to W$ ein Darstellungshomomorphismus und $U \subseteq V$ eine irreduzible Unterdarstellung. Dann ist $f(U) \subseteq W$ trivial oder eine irreduzible Unterdarstellung von W.*

Beweis. Laut Proposition 2.4.3 können wir sowohl V wie auch W als direkte Summe von irreduziblen Darstellungen $V \simeq U_1^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus U_n^{\alpha_n}$ und $W \simeq U_1^{\beta_1} \oplus \cdots \oplus U_m^{\beta_1}$ zerlegen. Da α_i und β_j auch Null sein dürfen, können wir annehmen, dass V und W die selben irreduziblen Komponenten haben. Wir schränken die Abbildung f auf U_i ein und betrachten den Kern. Da U_i irreduzibel ist, folgt, dass das Kern Null oder ganz U_i sein. In dem einen Fall ist das Bild Isomorph zu sich selbst und es gilt $f_{|_{U_i}}(U_i) \subseteq U_i^{\beta_i}$. Im anderen ist es die Nullabbildung. □

3 Charaktertheorie

Von jetzt an wird angenommen, dass $K = \mathbb{C}$ die komplexen Zahlen sind.

Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe G. Für einen $g \in G$, definieren wir $\chi_V(g)$ als die Spur der zu g korrespondierenden Isomorphie $\rho(g) : V \to V$. Sprich, der dazu zugehörigen Matrix. Die Matrix ist zwar von der Wahl der Basis abhängig, jedoch nur bis auf Ähnlichkeit. Zur Erinnerung, zwei $n \times n$-Matrizen A, B werden *ähnlich* genannt, wenn es eine invertierbare Matrix C gibt, so dass $B = C^{-1}AC$. Laut Lemma 3.1.5, Teil vi) ist die Spur von ähnlichen Matrizen gleich. Als solches ist $\chi_V(g)$ Wohldefiniert. Da die Spur eine komplexe Zahl ist, erhalten wir ein Abbildung

$$\chi_V : G \to \mathbb{C}.$$

Dies wird der *Charakter* der Darstellung genannt. Sprich

$$\chi_V(g) = \mathsf{Sp}(\rho(g)).$$

3.1 Die Spur einer Matrix

Da der Charakter einer Darstellung eine wichtige Rolle in Darstellugstheorie spielt, wollen wir uns etwas an die Spur und einer derer Eigenschaften aus der linearen Algebra erinnern.

Verbindung zum charakteristischem Polynom Zur Erinnerung, das *charakteristische Polynom* einer $n \times n$-Matrix A ist als

$$\mathsf{ch}_A(t) = \det(t \cdot \mathsf{Id} - A)$$

definiert. Es ist direkt klar, dass es ein Polynom vom Grad n ist, mit Leitkoeffizient (Koeffizient vor t^n) gleich 1. Da

$$\mathsf{ch}_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

ist die Konstante von ch_A gleich der Determinante von $\det(A)$. Das Koeffizient vor t^{n-1} ist gleich $-\mathsf{Sp}(A)$, sieh Bemerkung 3.1.2. Zusammengefasst haben wir

$$\mathsf{ch}_A(t) = t^n - \mathsf{Sp}(A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A). \tag{2}$$

Die Wurzeln von $\mathsf{ch}_A(t)$ sind die *Eigenwerte* von A, was bedeutet, dass es ein Vektor $0 \neq b \in \mathbb{C}^n$ gibt, mit

$$Ab = \lambda b.$$

Sein $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ alle Eigenwerte von A (einschließlich der Multiplizität, sprich, sie brauchen nicht alle verschieden sein). Es gilt

$$\mathsf{ch}_A(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n). \tag{3}$$

Indem man nun Gleichungen (2) und (3) miteinander vergleicht erhält man

$$\mathsf{Sp}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \tag{4}$$

und

$$\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Wie von der linearen Algebra vertraut, besagt der Satz von Cayley-Hamilton, dass

$$\mathsf{ch}_A(A) = 0 = (A - \lambda_1 \mathsf{Id}_n) \cdots (A - \lambda_n \mathsf{Id}_n).$$

Ein Polynom $f(t)$ wird *Minimalpolynom* von A genannt, wenn $f(A) = 0$ und für jedes Polynom $g(t)$ mit $g(A) = 0$, foglt $f \mid g$.

Der Satz von Caylay-Hamilton sagt nun, dass das Minimalpolynom das charakteristische Polynom teilt. Es folgt, dass die Nullstellen des Minimalpolynoms genau die Eigenwerte sind, diese können auch mit Multiplizität streng größer als einz auftreten, als Beispiel bei der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Multiplizität ist jedoch immer kleiner gleich als bei dem charakterischen Polynom. Wir werden folgenden Satz aus der linearen Algebra brauchen:

Satz 3.1.1. *Sein $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$ alle Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix A (einschließlich Multiplizität).*

i) Wenn alle λ_i's verschieden sind, dann stimmt das Minimalpolynom mit dem charakteristischen Polynom überein.

ii) Das Minimalpolynom stimmt genau dann mit dem charakteristischen Polynom überein, wenn A diagonalisierbar ist.

Zur Erinnerung, A heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine invertierbare Matrix C gibt, so dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist.

Bemerkung 3.1.2. Man betrachte sich die Determinante von $t\mathsf{Id} - A = (b_{ij})$. Die Determinante davon ist gegeben durch $b_{11}M_1 - b_{12}M_2 + \cdots + (-1)^{n+1}b_{1n}M_n$, wobei die M_i die Determinanten der Minoren ($n-1 \times n-1$ Matrizen) sind. Es ist klar, dass bei b_{1j}, mit $j \neq 1$, wir nie t^{n-1} als Term bekommen können, da t zweimal fehlen wird: Bei der Reihe von $b_{11} = t - a_{11}$ und der Spalte von $b_{jj} = t - a_{jj}$. Induktiv kann man das auch bei $b_{11}M_1$ machen und es folgt, dass der einzige Summand, bei der t^{n-1} vorkommen kann, das Produkt $(t - a_{11})(t - a_{22}) \cdots (t - a_{nn})$ ist. Nun ist es klar, dass t^{n-1} genau vor dem Term $-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$ steht. Dies ist aber $-\mathsf{Sp}(A)$.

Matrizen endlicher Ordnung Eine Matrix A heißt von *endlicher Ordnung*, wenn es eine natürliche Zahl $k \geq 1$ gibt, so dass $A^k = \mathsf{Id}$. Für eine solche Matrix teilt das Minimalpolynom die Gleichung $x^k - 1$. Dies hat jedoch k verschiedene Wurzen, also müssen alle Wurzeln des Minimalpolynomas verschieden sein. Satz 3.1.1 besagt nun, dass A diagonalisierbar ist.

Lemma 3.1.3. *Sei A eine $n \times n$-Matrix endlicher Ordnung mit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ als Eigenwerte (einschließlich der Multiplizität). Für jede natürliche Zahl $k \geq 0$ gilt*

$$\mathsf{Sp}(A^k) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k.$$

Wenn, des weiteren, A invertierbar ist, gilt die selbe Formel für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Wie schon argumentiert ist A diagonalisierbar. Es gibt als solches eine invertierbare Matrix C, so dass $C^{-1}AC = \mathsf{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix ist, mit den Eigenwerten als Diagonaleinträge. Da

$$\begin{aligned} C^{-1}A^kC &= (C^{-1}AC)(C^{-1}AC)\cdots(C^{-1}AC) \\ &= (C^{-1}AC)^k \\ &= (\mathsf{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n))^k \\ &= \mathsf{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathsf{Sp}(A) = \mathsf{Sp}(C^{-1}AC) = \mathsf{Sp}(\mathsf{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)) = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k.$$

□

Korollar 3.1.4. *Für eine Matrix A endlicher Ordnung ist die Spur $\mathsf{Sp}(A)$ eine Summe von Einheitswurzeln.*

Beweis. Wie schon argumentiert sind die Eigenwerte von A alles Wurzeln des Polynoms $x^k = 1$. Die Aussage follgt nun von Lemma 3.1.3. □

Eigenschaften der Spur

Lemma 3.1.5. *Sein A, B $n \times n$-Matrizen und α eine komplexe Zahl. Es gilt*

i) $\mathsf{Sp}(\mathsf{Id}_n) = n$, *wobei* Id_n *die Identitätsmatix ist.*

ii) $\mathsf{Sp}(\alpha A) = \alpha\mathsf{Sp}(A)$.

iii) $\mathsf{Sp}(A + B) = \mathsf{Sp}(A) + \mathsf{Sp}(B)$.

iv) $\mathsf{Sp}(A^T) = \mathsf{Sp}(A)$, *wobei* A^T *die Transponierte von A ist.*

v) $\mathsf{Sp}(AB) = \mathsf{Sp}(BA)$.

(vi) $\mathsf{Sp}(A) = \mathsf{Sp}(B)$ *wenn A und B ähnlich sind.*

Lemma 3.1.6. *Sein A und B $n \times n$, respektive $m \times m$ Matrizen. Es gilt*

i) $\mathsf{Sp}(A \oplus B) = \mathsf{Sp}(A) + \mathsf{Sp}(B)$.

ii) $\mathsf{Sp}(A \otimes B) = \mathsf{Sp}(A)\mathsf{Sp}(B)$.

Beweis. Teil i) ist klar. Für Teil ii) gilt laut Definition des Tensorproduktes

$$\begin{aligned} \mathsf{Sp}(A \otimes B) &= a_{11}\mathsf{Sp}(B) + a_{22}\mathsf{Sp}(B) + \cdots + a_{nn}\mathsf{Sp}(B) \\ &= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\mathsf{Sp}(B) \\ &= \mathsf{Sp}(A)\mathsf{Sp}(B). \end{aligned}$$

□

Korollar 3.1.7. *Für $f : V \to V$ und $g : W \to W$ lineare Abbildungen gilt*

$$\mathsf{Sp}(f \oplus g) = \mathsf{Sp}(f) + \mathsf{Sp}(g)$$

und

$$\mathsf{Sp}(f \otimes g) = \mathsf{Sp}(f)\mathsf{Sp}(g).$$

Lemma 3.1.8. *Sei $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ eine Darstellung einer endlichen Gruppe G. Folgende Eigenschaften gelten:*

i) $\chi_V(1) = \dim(V)$;

ii) $\chi_V(h^{-1}gh) = \chi_V(g)$, $g, h \in G$;

iii) $\chi_V(g)$ *ist eine Summe von Einheitswurzeln;*

iv) $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$, $g \in G$;

v) $|\chi_V(g)| \leq \chi_V(1)$;

vi) $\mathsf{Ker}(\rho) = \{g \in G | \chi_V(g) = \chi_V(1)\}$.

Beweis. i) Da $\rho(1) = \mathsf{Id}_V$, folgt die Aussage von der Tatsache, dass $\mathsf{Sp}(I_n) = n$ (Lemma 3.1.5).

ii) Es gilt $\rho(h^{-1}gh) = \rho(h)^{-1}\rho(g)\rho(h)$. Das Resultat folgt nun von Lemma 3.1.5, Teil vi).

iii) Sei $|G| = d$. Laut Fermat gilt $g^d = 1$ für jeden $g \in G$. Es folgt, dass $\rho(g)$ eine Matrix endlicher Ordnung ist (sprich $M^d = 1$). Die Aussage ist nun Korollar 3.1.4.

iv) Es gilt $\rho(g^{-1}) = (\rho(g))^{-1}$. Da A invertierbar ist, folgt von Lemma 3.1.3, dass

$$\chi_V(g^{-1}) = \lambda_1^{-1} + \cdots + \lambda_n^{-1}.$$

Da jedes der λ_i's eine Einheitswurzel ist, gilt $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$ für jeden i, denn $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|$ und wenn die Norm gleich 1 ist, ergibt es die Aussage. Wir folgern

$$\chi_V(g^{-1}) = \overline{\lambda_1} + \cdots + \overline{\lambda_n} = \overline{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = \overline{\chi_V(g)}.$$

v) Da die Norm multiplikativ ist, ist die Norm einer Einheitswurzel gleich 1. Es folgt

$$|\chi_V(g)| = |\lambda_1 + \cdots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\times n} = n = \dim(V) = \chi_V(1). \tag{5}$$

vi) Aus $\chi_V(g) = \chi_V(1) = n$ folgt von Gleichung (5), dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$ und daher $\rho(x) = \mathsf{Id}_n$, da die λ_i's Eigenwerte sind. □

Lemma 3.1.9. *Sein* $\rho_1 : G \to \mathrm{Gl}(V_1)$ *und* $\rho_2 : G \to \mathrm{Gl}(V_2)$ *Darstellungen. Es gilt*

$$\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$$

und

$$\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1}\chi_{V_2}.$$

Beweis. Dies folgt von Lemma 3.1.7. □

Der Hermitsche Produkt Die Hermitschen Vektorräume sind die komplexen Gegenstücke der Euklidischen Vektorräume. Diese werden auch Vektorräume mit einem inneren Produkt bzw. Prähilberträume genannt.

Zur Erinnerung, das Euklidische innere Produkt auf $\mathbb{R}^n$ ist durch

$$< x, y >= \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$

gegeben, wobei $x = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), y = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$. Dies ist immer positiv (oder Null) uns als solches können wir eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definieren, indem wir $|x| = \sqrt{< x, x >} = (\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2)^{\frac{1}{2}}$ erklären. Dies erlaubt uns die Distanz zwischen zwei Punkten als $\mathsf{dist}(x, y) = |x - y|$ zu definieren.

Wir wollen dies nun für $\mathbb{C}^n$ machen. Das Problem ist, dass wenn $\alpha \in \mathbb{C}$, muss α^2 nicht zwangsweise positiv sein. Als solches wäre die Distanz nicht mehr positiv. Die Lösung ist die komplex Konjugierte: Wir definieren

$$< x, y >= \overline{\alpha_1}\beta_1 + \cdots + \overline{\alpha_n}\beta_n.$$

Basierend auf das obige haben wir nun die folgende Definition:

Definition 3.1.10. Ein Hermitscher Vektorraum ist ein komplexer Vektorraum V, zusammen mit einer Abbildung

$$\langle -; - \rangle : V \times V \to \mathbb{C},$$

so dass für alle $x, y, z \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

- $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$
- $< x, \alpha z >= \alpha < x, z >$
- $< x, y >= \overline{< y, x >}$
- $< x, x > \geq 0$ mit Gleichheit genau dann wenn $x = 0$.

Diese Abbildung wird auch das *Hermitsche* Produkt genannt.

Es folgt

$$< \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k, \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_m y_m >= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_i} \beta_j < x_i, y_j > .$$

Wie auch in der Euklidischen Geometrie definieren wir nun die *Norm* eines Vektors $v \in V$ durch $|v| = \sqrt{< v, v >}$. Zwei Vektore werden *orthogonal* genannt, wenn $< v, w >= 0$ gilt. Dementsprechend wird eine Menge $\{v_1, \cdots, v_k\}$ als orthogonal bezeichnet, wenn diese paarweise Orthogonal sind: sprich $< v_i, v_j >= 0$ für alle $i \neq j$. Diese werden *orthonormal* bezeichnet, wenn sie orthogonal sind und jeder Vektor Norm gleich 1 hat: Sprich

$$< v_i, v_j >= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Lemma 3.1.11. *Aus Orthogonalität folgt lineare Unabhängigkeit.*

Beweis. Aufgabe **??**. □

Lemma 3.1.12. *Jeder Hermitscher Raum hat eine (unendlich viele wenn* $\dim \geq 1$*) Orthonormale Basis.*

Bemerkung 3.1.13. Die oben diskutierte Konstruktion kann man (bis auf Wurzelziehen) als ein Spezialfall der Norm sehen, welches in der algebraischen Zahlentheorie definiert wird.

Definition 3.1.14. Das *orthogonale Komplement* einer Teilmenge $S \subseteq V$ ist die Kollektion alle Vektoren $v \in V$, welche zu *irgendeinem* $s \in S$ orthogonal ist. Es wird durch $S^{\perp}$ beschriftet.

Lemma 3.1.15. *Das orthogonale Komplement* $S^{\perp}$ *einer beliebigen Menge* S *ist ein Untervektorraum von* V*. Falls* $S = U$ *ein Untervektorraum ist, gilt*

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

Lemma 3.1.16. *Sei* $\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ *eine orthonormale Basis eines Hermitschen Vektorraumes* V*. Für Vektoren* $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ *und* $w = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$ *gilt*

$$< v, w >= \overline{\alpha_1} \beta_1 + \cdots + \overline{\alpha_n} \beta_n.$$

Spezifisch gilt

$$|v| = \sqrt{\alpha_1^2 \cdots + fal_n^2}$$

und

$$\alpha_i =< e_i, v >, \ \beta_i =< e_i, w >$$

für all $i = 1, \cdots, n$*. Als solches haben wir*

$$v = \sum_{i=1}^{n} < e_i, v > e_i$$

und

$$|v| = \sqrt{< e_1, v >^2 + \cdots + < e_n, v >^2}.$$

Die Klassenfunktionen

Definition 3.1.17. Eine Funktion $\psi : G \to \mathbb{C}$ wird *Klassenfunktion* genannt falls

$$\psi(h^{-1}gh) = \psi(g).$$

Die Menge aller Klassenfunktionen auf G wird mit $\mathcal{C}(G)$ bezeichnet.

Proposition 3.1.18. *Die Menge $\mathcal{C}(G)$ ist eine $\mathbb{C}$-Algebra mit einem Hermitschen Produkt. Die Verknüpfungen werden wie folgt gegeben:*

$$(\psi + \phi)(g) = \psi(g) + \phi(g),$$

$$(\psi\phi)(g) = \psi(g)\phi(g),$$

$$(\lambda\psi)(g) = \lambda\psi(g)$$

und

$$< \psi, \phi >= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\psi(g)}\phi(g).$$

Hier sind $\psi, \phi \in \mathcal{C}(G)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Null und Einheit sind die jeweiligen konstanten Funktionen.

Beweis. Aufgabe **??** □

Bemerkung 3.1.19. Wir haben in Lemma 3.1.8 (Teil (ii)) schon gezeigt, dass der Charakter einer Darstellung eine Klassenfunktion ist. Sprich $\chi_V \in \mathcal{C}(G)$ für $\rho : G \to V$.

Invariente Unterdarstellung

Definition 3.1.20. Sei $\rho : G \to V$ eine Darstellung von G. Ein Element $v \in V$ heißt *G-invariant* (oder einfach *invariant*), wenn für jeden $g \in G$ gilt $gv = v$.

Lemma 3.1.21. *Die Menge der G-invarianten Elemente*

$$V^{inv} = \{v \in V | gv = v, \text{ for all } g \in G\}$$

einer Darstellung $\rho : G \to V$ ist eine Unterdarstellung von G.

Beweis. Aufgabe **??**. □

Im speziellen Fall, wenn $V = \mathsf{Hom}(U, W)$, wie im Abschnitt 2.2.4 definiert, benutzen wir auch die Notation

$$\mathsf{Hom}_G(V, W) := \mathsf{Hom}(U, W)^{inv}.$$

Da, bei Definition, die Wirkung von g auf $f \in \mathsf{Hom}(V, W)$ durch $g \cdot f := gf(g^{-1})$ gegeben ist, merken wir, dass $f \in \mathsf{Hom}_G(V, W)$, genau denn wenn $gf(g^{-1}) = f$ also $g^{-1}f = f(g^{-1})$, sprich f ein Darstellungshomomorphismus ist. Das Lemma von Schur (2.4.4) kann nun auch äquivalent wie folgt formuliert werden:

Lemma 3.1.22. *Für V, W irreduzibel gilt*

$$\dim\left(\mathsf{Hom}_G(V, W)\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } V \cong W \\ 0 & \text{if } V \ncong W. \end{cases}.$$

Beweis. Das einzige Argument, dass wir hier machen brauchen ist, was passiert, wenn $V \neq W$ aber $V \simeq W$ isomorph sind. Man wähle sich eine Isomorphie $f : V \xrightarrow{\sim} W$ und somit ist $f(V) = W$. Dann besagt das Lemma von Schur, dass $\mathsf{Hom}(f(V), W) \simeq \mathbb{C}$. Da aber für isomorphe X, Y gilt $\mathsf{Hom}(A, X) \simeq \mathsf{Hom}(A, Y)$ sind wir fertig. □

Proposition 3.1.23. *Sei $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ eine Darstellung einer Gruppe G. Wir definieren*

$$p_{+1} : V \to V$$

durch

$$p_{+1}(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} xv.$$

Wie gewohnt schreiben wir xv statt $\rho(x)(v)$. Die Abbildung p_{+1} ist ein Darstellungshomomorphismus, was zugleich eine Projektion ist, sprich $p_{+1}^2 = p_{+1}$ und $\mathsf{Bild}(p_{+1}) = V^{inv}$.

Beweis. Es ist ein Darstellungshomomorphismus,
Sei $w \in V^{inv}$. Es folgt $xw = w$ und wir erhalten

$$p_{+1}(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} w = w. \tag{6}$$

Wir schlussfolgern, dass $V^{inv} \subseteq \mathsf{Bild}(p_{+1})$. Auf der anderen Seite gilt für jeden $g \in G$, dass

$$\begin{aligned} gp_{+1}(v) &= g\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} xv \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (gx)v \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G, y = gx} yv \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G, x = g^{-1}y} yv \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} yv \\ &= p_{+1}(v), \end{aligned}$$

also $\mathsf{Bild}(p_{+1}) \subseteq V^{inv}$ woraus

$$\mathsf{Bild}(p_{+1}) = V^{inv}$$

folgt. Es gilt auch

$$\begin{aligned} p_{+1}(gv) &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} x(gv) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (xg)v \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G, y = gx} yv \\ &= p_{+1}(v), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung schon oben gezeigt wurde. Dies beweist nun auch $gp_{+1}(v) = p_{+1}(gv)$. Es ist daher ein Darstellungshomomorphismus. Gleichung (6) gibt uns nun $p_{+1}(p_{+1}(v)) = p_{+1}(v)$ und wir sind fertig. □

Lemma 3.1.24. *Genau dann ist $\dim(V^{inv}) = \dim V$, wenn V eine triviale Darstellung von G ist.*

Beweis. Aufgabe **??**. □

Proposition 3.1.25. *Für eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ gilt die Gleichung*

$$\dim(V^{inv}) =< 1, \chi_V >= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g).$$

Beweis. Sei p_{+1} wie in Proposition 3.1.23. Da es eine Projektion ist, besagt Lemma 2.3.9, dass

$$\dim \mathsf{Bild}(p_{+1}) = \mathsf{Sp}(p_{+1}).$$

Die Proposition 3.1.23 wieder angewendet besagt nun durch Lemma 3.1.5, dass

$$\begin{aligned}
\dim(V^{inv}) &= \dim \mathsf{Bild}(p_{+1}) \\
&= \mathsf{Sp}(p_{+1}) \\
&= \mathsf{Sp}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} gv.\right) \quad \text{(bei Definition von } p_{+1}) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathsf{Sp}(\rho(g)) \quad \text{(bei Definition von } xv) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g).
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.1.26. *Sei V eine nicht-triviale irreduzible Darstellung. Es gilt*

$$\sum_{x\in G} \chi_V(x) = 0.$$

Beweis. Für jede Darstellung ist V^{inv} eine Unterdarstellung von V, Lemma 3.1.21. Bei Annahme ist V irreduzibel und somit muss $V^{inv} = 0$ oder $V^{inv} = V$ gelten. Der zweite Fall gilt genau dann, wenn V eine triviale Darstellung ist, laut Lemma 3.1.24. Bei Annahme muss daher $V^{inv} = 0$ gelten und der Rest folgt nun von Proposition 3.1.25. □

Satz 3.1.27. *Für V und W irreduzible Darstellungen gilt*

$$< \chi_V, \chi_W > := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } V \cong W \\ 0 & \text{wenn } V \ncong W. \end{cases}$$

Anders gesagt, die Charaktere von irreduziblen Darstellung sind paarweise orthogonal und haben Länge eins.

Beweis. Man wende Proposition 3.1.25 auf die Darstellung $U = \mathsf{Hom}(V, W)$, wobei die Wirkung von G, wie gewohnt durch

$$(gf)(v) = gf(g^{-1}v)$$

gegeben wird, mit $f \in \mathsf{Hom}(V, W)$, $g \in G$ und $v \in V$. Es gilt

$$\begin{aligned}
< \chi_V, \chi_W > &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}\chi_W(g) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V^*(g)\chi_W(g) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} (\chi_V^* \otimes \chi_W)(g) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{\mathsf{Hom}(V,W)}(g) \\
&= < 1, \chi_{\mathsf{Hom}(V,W)} > \\
&= \dim\left(\mathsf{Hom}_G(V, W)\right) \quad \textit{Prop.}\ 3.1.25 \\
&= \begin{cases} 1 & \text{wenn } V \cong W \\ 0 & \text{wenn } V \ncong W. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist Lemma 3.1.22. □

3.1.1 Charaktertafeln

Für eine Gruppe G können wir eine Charaktertafel erstellen. Dieses sieht wie folgt aus:

$\#\ \overline{g} \subseteq G$	*Hier schreiben wir, wie viele Elemente in der Konjugationsklasse von g sind*
$\overline{g} \in G_c$	*Hier gehen wir durch alle Elemente von G_c durch*
χ_i	*Hier schreiben wir die Auswertungen des Charakters $\chi_i(\overline{g})$* für alle $\overline{g} \in G_c$
$\vdots$	*Wir gehen durch alle irreduzible Darstellungen von G*

Wie in Bemerkung 3.1.19 erwähnt sind für konjugierte $g, h \in G$, die Charakterauswertungen immer gleich. Als solches reicht es aus zu vermerken, wie viele Elemente in der Konjugationsklasse sind. Diese Tafeln sind von großer Bedeutung für die Darstellungstheorie, wie wir es später merken werden.

Satz 3.1.27 ermöglicht uns direkt einige Einträge in die Charaktertafel zu vervollständigen. Dies ist hilfreicher als man vielleicht am Anfang denkt, da wir einige Zeilen/Reihen sehr einfach erhalten können (zum Beispiel die triviale Darstellung, es gibt aber oft auch andere). Als solches können wir öfters die Charaktere schwere Darstellungen, rein durch den Charaktertafel erkennen.

Satz 3.1.27 besagt im Grunde, dass die Zeilen der Charaktertafel orthogonal sind. Im Abschnitt 3.3.4 werden wir sehen, dass auch die Spalten orthogonal sind.

Hier einige Beispiele:

Die Charaktertafel von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\#$	1	1
$\overline{g} \in G_c$	0	1
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

Satz 3.1.27 besagt nun, dass

$$\begin{aligned}
\overline{\chi_1(0)}\chi_1(0) + \overline{\chi_1(1)}\chi_1(1) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 \\
\overline{\chi_1(0)}\chi_2(0) + \overline{\chi_1(1)}\chi_2(1) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0 \\
\overline{\chi_2(0)}\chi_2(0) + \overline{\chi_2(1)}\chi_2(1) &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2
\end{aligned}$$

gelten. Wir heben einen Eintrag ausgelassen, da dies einfach das komplex Konjugierte der zweiten Reihe ist.

Die Charaktertafel von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

$\#$	1	1	1
$\overline{g} \in G_c$	0	1	2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ζ_3	ζ_3^2
χ_3	1	ζ_3^2	ζ_3

Satz 3.1.27 besagt nun, dass

$$\begin{aligned}
\overline{\chi_1(0)}\chi_1(0) + \overline{\chi_1(1)}\chi_1(1) + \overline{\chi_1(2)}\chi_1(2) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 \\
\overline{\chi_1(0)}\chi_2(0) + \overline{\chi_1(1)}\chi_2(1) + \overline{\chi_1(2)}\chi_2(2) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot \zeta_3 + 1 \cdot \zeta_3^2 = 0 \\
\overline{\chi_1(0)}\chi_3(0) + \overline{\chi_1(1)}\chi_3(1) + \overline{\chi_1(2)}\chi_3(2) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot \zeta_3^2 + 1 \cdot \zeta_3 = 0 \\
\overline{\chi_2(0)}\chi_2(0) + \overline{\chi_2(1)}\chi_2(1) + \overline{\chi_2(2)}\chi_2(2) &= 1 \cdot 1 + \overline{\zeta_3} \cdot \zeta_3 + \overline{\zeta_3^2} \cdot \zeta_3^2 = 3 \\
\overline{\chi_2(0)}\chi_3(0) + \overline{\chi_2(1)}\chi_3(1) + \overline{\chi_2(2)}\chi_3(2) &= 1 \cdot 1 + \overline{\zeta_3} \cdot \zeta_3^2 + \overline{\zeta_3^2} \cdot \zeta_3 = 0 \\
\overline{\chi_3(0)}\chi_3(0) + \overline{\chi_3(1)}\chi_3(1) + \overline{\chi_3(2)}\chi_3(2) &= 1 \cdot 1 + \overline{\zeta_3^2} \cdot \zeta_3^2 + \overline{\zeta_3} \cdot \zeta_3 = 3
\end{aligned}$$

gelten. Auch hier haben wir einige (3) Gleichungen ausgelassen. Zur Erinnerung, $\overline{\zeta_3} = \zeta_3^2$ und $1 + \zeta_3 + \zeta_3^2 = 1$.

Die Charaktertafel von S_3

$\#$	1	3	2
$\overline{g} \in G_c$	1	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Satz 3.1.27 besagt nun, dass

$$\begin{aligned}
\overline{\chi_1(1)}\chi_1(1) + \overline{\chi_1(12)}\chi_1(12) + \overline{\chi_1(123)}\chi_1(123) &= 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 = 6\\
\overline{\chi_1(1)}\chi_2(1) + \overline{\chi_1(12)}\chi_2(12) + \overline{\chi_1(123)}\chi_2(123) &= 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot (-1) + 2\cdot 1\cdot 1 = 0\\
\overline{\chi_1(1)}\chi_3(1) + \overline{\chi_1(12)}\chi_3(12) + \overline{\chi_1(123)}\chi_3(123) &= 1\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot (-1) = 0\\
\overline{\chi_2(1)}\chi_2(1) + \overline{\chi_2(12)}\chi_2(12) + \overline{\chi_2(123)}\chi_2(123) &= 1\cdot 1 + 3\cdot (-1)\cdot (-1) + 2\cdot 1\cdot 1 = 6\\
\overline{\chi_2(1)}\chi_3(1) + \overline{\chi_2(12)}\chi_3(12) + \overline{\chi_2(123)}\chi_3(123) &= 1\cdot 2 + 3\cdot (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot (-1) = 0\\
\overline{\chi_3(1)}\chi_3(1) + \overline{\chi_3(12)}\chi_3(12) + \overline{\chi_3(123)}\chi_3(123) &= 2\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot (-1)\cdot (-1) = 6
\end{aligned}$$

gelten. Auch hier haben wir einige (3) Gleichungen ausgelassen. Zur Erinnerung, $\overline{\zeta_3} = \zeta_3^2$ und $1 + \zeta_3 + \zeta_3^2 = 1$.

Anwendung von Satz 3.1.27 Man nehme, zum Beispiel, die Gruppe $G = A_4 = \langle (123), (124) \rangle$. Es hat drei irreduzible Darstellungen vom Grad 1 und eine irreduzible Darstellung vom Grad 3. Wir werden bald lernen, wie man auf sowas kommen kann. Man nehme an, dass wir alle irreduziblen Darstellungen vom Grad 1 kennen (was einfacher zu finden ist, da diese genau die Gruppenhomomorphismen $G \to \mathbb{C}^*$ sind). Das heißt, wir wissen folgende Information:

$\#$	1	3	4	4
$\overline{g} \in G_c$	1	(12)(34)	(123)	(124)
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ζ_3	ζ_3^2
χ_3	1	1	ζ_3^2	ζ_3
χ_4	3	x	y	z.

Es gilt nun $x, y, z \in \mathbb{C}$ zu bestimmen. Satz 3.1.27 besagt nun, dass

$$\begin{aligned}
3 + 3x + 4y + 4z &= 0 && (7)\\
3 + 3x + 4\zeta_3 y + 4\zeta_3^2 z &= 0 && (8)\\
3 + 3x + 4\zeta_3^2 y + 4\zeta_3 z &= 0 && (9)\\
9 + 3\overline{x}x + 4\overline{y}y + 4\overline{z}z &= 12. && (10)
\end{aligned}$$

Gleichungen (7), (8) und (9) zusammen besagen, dass $y + z = \zeta_3 y + \zeta_3^2 z = \zeta_3^2 y + \zeta_3 z$, woraus wir

$$\left(1 - \zeta_3^2\right)\left(\zeta_3^2 - 1\right) z = \left(1 - \zeta_3\right)\left(\zeta_3 - 1\right) z$$

schließen können. Wenn $z \neq 0$, dann folgt

$$\left(1 - \zeta_3^2\right)^2 = \left(1 - \zeta_3\right)^2,$$

was ein Widerspruch ist, da nach ausmultiplizieren wir $\zeta_3 = \zeta_3^2$ kriegen. Es folgt, dass $z = 0$ und daraus erhalten wir direkt $y = 0$ (folgt aus $y = \zeta_3 y$). Gleichung (7) besagt nun $x = -1$ und somit sind wir fertig.

Wir merken auch, dass wir Gleichung (10) gar nicht benutzt haben. Sprich, wir hätten eventuell weniger Information gebraucht.

3.2 Konjugationsklassen

Definition 3.2.1. Zwei Elemente $a, b \in G$ einer Gruppe heißen *konjugiert*, geschrieben $a \sim_G b$, wenn es einen $g \in G$ gibt, so dass $g^{-1}ag = b$.

Lemma 3.2.2. *i) Für alle $a \in G$ gilt $a \sim_G a$.*

ii) Aus $a \sim_G b$ folgt $b \sim_G a$.

iii) Wenn $a \sim_G b$ und $b \sim_G c$, dann gilt $a \sim_G c$.

iv) Wenn $a \sim_G b$, gilt für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{N}$. dass $a^n \sim_G b^n$.

v) Für jeden $a, b \in G$ ist $ab \sim_G ba$.

vi) Aus $1 \sim_G a$ folgt $a = 1$.

Beweis. i) Man nehme einfach $g = 1$ und erhalte $g^{-1}ag = a$.
ii) Sei $g^{-1}ag = b$. Von $h = g^{-1}$ folgt $h^{-1}bh = gbg^{-1} = g(g^{-1}ag)g^{-1} = a$.
iii) Sein $g^{-1}ag = b$, $h^{-1}bh = c$ und setze $f = gh$. Es gilt

$$f^{-1}af = h^{-1}g^{-1}agh = h^{-1}bh = c.$$

iv) Wenn $g^{-1}ag = b$, dann folgt

$$b^2 = bb = (g^{-1}ag)(g^{-1}ag) = g^{-1}a^2g,$$

woraus wir $a^2 \sim_G b^2$ schließen können. Gleichermaßen ist für jeden $n \in \mathbb{N}$

$$b^n = (g^{-1}ag)^n = g^{-1}a^ng.$$

v) Setze $g = a$. Es folgt $ab \sim_G g^{-1}(ab)g = a^{-1}aba = ba$.
vi) Die Aussage $1 \sim a$ impliziert die Existenz eines $g \in G$, so dass $a = g^{-1} \cdot 1 \cdot g = 1$ und wir sind fertig. □

Lemma 3.2.3. *Für Gruppen G, H gilt $(G \times H)_C \simeq G_c \times H_c$.*

Sei $a \in G$. Wir bezeichnen die Menge der zu a konjugierten Elemente mit

$$a^G = \{b \in G | b \sim_G a\}.$$

Für jede Gruppe G gilt $1^G = \{1\}$. Von Lemma 3.2.2 folgt direkt das folgende:

Korollar 3.2.4. *Die Menge a^G ist eine Nebenklasse von G. Sprich, die Kollektion aller a^G (durchlaufend durch alle $a \in G$) formt eine Partition von G.*

Zur Erinnerung, ein Partition besagt, dass i) die Mengen a^G jedes Element von G durchlaufen und ii) wenn a^G und b^G ein gemeinsames Element haben, dann folgt $a^G = b^G$.

Beweis. 3.2.4 Da $a \sim_G a$ folgt $a \in a^G$ und als solches $\bigcup_{a \in G} a^G = G$. Für Teil ii), sei $c \in a^G \bigcap b^G$. Dann ist $c \sim_G a$ und $c \sim_G b$, woraus $a \sim_G b$ und als solches $a \in b^G$ folgt. Sei $x \in a^G$ beliebig. Dann gilt $x \sim_G a$, da $a \sim_G b$ und es folgt $x \sim_G b$. Wir haben $x \in b^G$ und schlussfolgern $a^G \subset b^G$. Aus Symmetriegründen muss auch $b^G \subset a^G$ gelten und wir haben $a^G = b^G$. □

Sei G_c die Menge aller Konjugationsklassen von G. Bei Definition haben wir also eine surjektive Abbildung $q : G \to G_c$, so dass $q(a) = q(b)$ genau dann wenn $a \sim_G b$. Die Anzahl der Elemente von G_c wird die *Konjugationsklassenzahl* von G genannt und mit $|G_c|$ bezeichnet.

Wir wollen nun beweisen, dass die Konjugationsklassenzahl gleich dem Anzahl aller paarweise nicht isomorpher, irreduzibler Darstellungen von G übereinstimmt. Dies bedarf jedoch etwas Arbeit.

Lemma 3.2.5. *Für jede Klassenfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ folgt aus $a \sim_G b$, dass $f(a) = f(b)$.*

Eine andere Art und Weise dies auszudrücken ist, dass jede Klassenfunktion durch G_c *faktorisiert*. Sprich, jede Klassenfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist "eigentlich" $G_c \to \mathbb{C}$. Expliziter, es gibt genau eine $f^* : G_c \to \mathbb{C}$, so dass $f = f^* \circ q$, wobei $q : G \to G_c$ die kanonische Abbildung ist. (Die Tatsache, dass es "genau" eine solche gibt, folgt von der Surjektivität, da aus $f^*(a^G) \neq f^\times(a^G)$ folgern würde, dass auch $f(a) = q \circ f^*(a) \neq q \circ f^\times(a) = f(a)$, wobei a eine beliebige Hochhebung von a^G ist). Da natürlich jede Abbildung $r : G_c \to \mathbb{C}$ genau eine Abbildung $f : G \to \mathbb{C}$ definiert, mit $f = r \circ q$, können wir unseren Lemma als eine Formel ausdrücken:

$$\mathcal{C}(G) = \mathsf{Abb}(G_c, \mathbb{C}).$$

Da im Allgemeinen $\mathsf{Abb}(X, Y) \simeq Y^{|X|}$ folgt direkt

$$\dim(\mathcal{C}(G)) = |G_c|. \tag{11}$$

Proposition 3.2.6. *Die Anzahl aller paarweise nicht isomorpher, irreduzibler Darstellungen von G ist kleiner gleich der Anzahl der Konjugationsklassenzahl von G.*

Beweis. Laut Satz 3.1.27 wissen wir, dass die Anzahl aller paarweise nicht isomorpher, irreduzibler Darstellungen von G ein orthonormales System formen. Man benutzte nun Lemma 3.1.11 um zu schlussfolgern, dass dies wiederum kleiner gleich $\dim(\mathcal{C}(G))$ ist. Formel (11) schließt den Beweis ab. □

3.3 Darstellungen durch den Charakter wiedererkennen

Durchgehend in diesem Abschnitt, sein $U_1, \cdots, U_s$ paarweise, nicht isomorphe, irreduzible Darstellungen von G und man nehme an, dass jede irreduzible Darstellung von G zu einem der U_i's isomorph ist. Sei deren Ordnung auch fixiert.

Satz 3.3.1. *Zwei Darstellungen V und W sind genau dann isomorph wenn ihre Charaktere $\chi_V = \chi_W$ gleich sind.*

Beweis. Laut Proposition 3.2.6 wissen wir, dass Menge der Isomorphieklassen von irreduziblen Darstellungen $\{U_i\}_{i=1}^s$ einer endlichen Gruppe G endlich ist. Von Proposition 2.4.3 wissen wir, dass jede Darstellung als eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen ausgedrückt werden kann. Indem wir also diese mit isomopren Darstellungen ersetzen, gilt

$$V = U_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus U_s^{n_s}, \tag{12}$$

mit $n_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, s$. Als solches ist V, eindeutig bis auf Isomorphie, durch ein ganzzahliges Vektor $(n_1, \ldots, n_s)$ definiert. Lemma 3.1.9 und die Dekomposition (12) erlaubt uns

$$\chi_V = n_1\chi_1 + \cdots + n_s\chi_s \tag{13}$$

zu schreiben. Da Satz 3.1.27 besagt

$$< \chi_j, \chi_j >= \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

für $1 \leq i, j \leq s$, folgt, dass

$$< \chi_i, \chi_V >=< \chi_i, n_1\chi_1 + \cdots + n_s\chi_s >= n_i, \tag{14}$$

wobei χ_i eine Kurzform von χ_{U_i} ist. Für eine weitere Darstellung W sei

$$W = U_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus U_s^{m_s}.$$

Wenn $\xi_V = \xi_W$, besagt Satz 3.1.27 wieder, dass für jeden $1 \leq i \leq s$,

$$m_i =< \chi_i, \chi_W >=< \chi_i, \chi_V >= n_i,$$

was $W \cong V$ impliziert. □

Proposition 3.3.2. *Eine Darstellung ist genau dann irreduzibel, wenn* $|\chi_V| :=< \chi_V, \chi_V >= 1$.

Beweis. Von Satz 3.1.27 wissen wir, dass $< \chi_V, \chi_V >= 1$. Umgekehrt sei $< \chi_V, \chi_V >= 1$. Es folgt von der Dekomposition (12), dass

$$1 =< \chi_V, \chi_V >=< n_1\chi_1 + \cdots + n_s\chi_s, n_1\chi_1 + \cdots + n_s\chi_s >= n_1^2 + \cdots + n_s^2.$$

Hier haben wir die Orthonormalität der $\chi_1, \cdots, \chi_s$'s benutzt. Da $n_1, \cdots, n_s \in \mathbb{N}$, muss genau einer von denen 1 sein und alle anderen 0. Für $n_k = 1$ folgt darher $n_i = 0$ für alle $i \neq k$ und die Dakomposition (12) iimpliziert, dass $V = U_k$ irreduzibel ist. □

3.3.1 Permutationsdarstellung

Wir erinnern uns an Abschnitt 1.2.1. Es sei E eine G-Menge.

Proposition 3.3.3. *Die Wirkung von* G *auf* E *induziert eine* G*-Modul Struktur auf* $K[E]$.

Diese G-Modulstruktur wird *Permutationsdarstellung* genannt. Für eine G-Menge E definieren wir die Menge der *Fixpunkte*

$$\mathrm{Fix}_G(E, g) = \{e \in E \mid ge = e\},$$

wobei $g \in G$ und $e \in E$.

Proposition 3.3.4. *Für den Charakter der Permutationsdarstellung gilt*

$$\chi_{\mathbb{C}[E]}(g) = |\mathrm{Fix}_G(E, g)|.$$

Beweis. Wie im Abschnitt 1.2.1 schon erwähnt, formen die Elemente von E eine $\mathbb{C}$-Basis von $\mathbb{C}[E]$. Als solches können wir Endomorphismen Matrizen des Vekotrraumes $\mathbb{C}[E]$ durch $E \times E$ indexieren: Sprich, eine Matrix ist von der Form $\{a_{i,j}\}$, mit $i, j \in E$. Diese hat die Eigenschaft, dass für jeden $g \in G$, die lineare Abbildung $v \mapsto gv$ ein Basiselement $e \in E$ auf den Basiselement ge abbildet. Als solches hat jede Spalte der Matrix $\rho(g)$ genau einen Eintrag ungleich Null, nämlich am Platz $a_{i,j}$ mit $i = e, j = ge$, wo dann genau 1 steht. Da die Spur einer Matrix die Summe der Diagonaleinträge ist und wir uns nur die Einträge ungleich Null ansehen brauchen, ist es genau an die Menge, wenn $e = ge$, was die Fixpunkte sind, wie gewollt. □

3.3.2 Reguläre Darstellungen

Man nehme nun die spezielle Permutationsdarstellung, wenn $E = G$ und die Wirkung einfach die Multiplikation von G ist. In anderen Worten, wir betrachten den Fall, wenn das K-Algebra $K[G]$ auf K in natürlicher Weise (durchs Vergessen der Multiplikation) ein K-Vektorraum wird. In diesem Fall ist $K[G] = \sum_{g \in G} \alpha_g g$, $\alpha_g \in K$. Die Struktur einer G-Darstellung auf $K[G]$ ist dann durch

$$g \cdot \sum_{h \in G} \alpha_h h = \sum_{h \in G} \alpha_h (gh) = \sum_{x \in G} \alpha_{g^{-1}x} x$$

definiert. Diese Darstellung wird die *reguläre Darstellung* von G genannt. Der Charakter dieser Darstellung wird mit χ_{reg} beschrifftet.

Beispiel 3.3.5. Sei $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ die zyklische Gruppe mit 3 Elementen. Die Elemente von $K[\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}]$ sind $\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, wobei $\alpha \in K$. Die Vekotrraumstruktur ist durch

$$(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2) + (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)t + (\alpha_2 + \beta_2)t^2$$

und

$$\lambda(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2) = \lambda\alpha_0 + \lambda\alpha_1 t + \lambda\alpha_2 t^2$$

definiert. Die Wirkung von t auf $\mathbb{C}[[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]]$ ist gegeben durch

$$t(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2) = \alpha_2 + \alpha_0 t + \alpha_1 t^2.$$

In Matrixform ist es

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1, \end{pmatrix} \ \rho(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \rho(t^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist nun direkt klar, dass

$$\chi_{\text{reg}}(1) = 3, \quad \chi_{\text{reg}}(t) = 0 = \chi_{\text{reg}}(t^2).$$

Wir werden bewein, dass $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ keine Ausnahme ist:

Proposition 3.3.6. *Für die reguläre Darstellung einer endlichen Gruppe G gilt*

$$\chi_{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G| & g = 1 \\ 0 & g \neq 1, \end{cases}$$

mit $g \in G$.

Beweis. Die Dimension einer regulären Darstellung ist gleich $|G|$, da bei Definition $K[G]$ ein $|G|$ dimensionaler K-Vektorraum ist. Die erste Gleichung folgt, da allgemein $\chi_V(1) = \dim(V)$ für eine beliebige Darstellung V. Für $g \neq 1$ permutiert die Multiplikation mit g jdese Element von G, wobei keines der Elemente fix bleibt, denn $gx = x$ impliziert $g = 1$. Da diese die Basisvektoren der regulären Darstellung sind, sind in der korrespondierenden Matrix alle diagonalen Einträge null. Es folgt, dass die Spur Null ist. □

Beweis. [Alternativer beweis] Eine reguläre Darstellung ist ein Spezialfall einer Permutationsdarstellung. Man benutze Proposition 3.3.4 mit $E = G$. Im Falle wenn $x = 1$, erfüllt jedes Element von E die Eigenschaft $xe = e$. Es folgt, dass $\text{Fix}_G(E, x) = G$, woraus die erste Zeile der Klammer folgt. Wenn $x \neq 1$, dann ist $\text{Fix}_G(E, x) = \varnothing$, woraus die zweite Zeile follgt. □

Sein, wie gewohnt, G eine Gruppe und $U_1, \cdots, U_s$ paarweise nicht-isomorphische irreduzible Darstellungen, so dass jede irreduzible Darstellung von G isomorph zu einem deiser U_i's ist. Des weiteren gelte

$$\dim(U_i) = d_i, \quad i = 1, \cdots, s.$$

Wir wollen beweisen, dass $s = |G_c|$. Dies wird im Abschnitt 3.3.3 gemacht. Davor noch einige Lemmas.

Lemma 3.3.7. *Für eine reguläre Darstellung gilt*

$$\mathbb{C}[G] = U_1^{d_1} \oplus \cdots \oplus U_s^{d_s}.$$

Beweis. Sei

$$\mathbb{C}[G] = U_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus U_s^{a_s}.$$

Es gilt zu beweisen, dass $a_i = \dim U_i$ für jeden $i = 1, \cdots, s$. Gleichung (14) gibt uns

$$a_i =< \chi_i, \chi_{\text{reg}} >= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_i(x)} \chi_{\text{reg}}(x) > .$$

Laut Proposition 3.3.6 ist $\chi_{\text{reg}}(x) = 0$ für jeden $x \neq 1$, woraus

$$a_i = \frac{1}{|G|} \overline{\chi_i(1)} \chi_{\text{reg}}(1) = d_i$$

folgt, da $\chi_i(1) = \dim U_i = d_i$ und $\chi_{\text{reg}}(1) = |G|$. □

Korollar 3.3.8. *Es gilt $d_1^2 + \cdots + d_s^2 = d$.*

Beweis. Da $\chi_{\text{reg}} = d_1\chi_1 + \cdots + d_s\chi_s$ und die χ_i's orthonormal sind, erhalten wir

$$< \chi_{\text{reg}}, \chi_{\text{reg}} >= d_1^2 + \cdots + d_s^2.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$< \chi_{\text{reg}}, \chi_{\text{reg}} >= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_{\text{reg}}(x)} \chi_{\text{reg}}(x) = \frac{1}{|G|} |G|^2 = |G|,$$

was nun den Beweis abschliest. □

Bemerkung 3.3.9. Ohne Beweis sagen wir, dass jedes der d_i's von Korollar 3.3.8 die Anzahl $|G|$ teilt. Es gilt noch mehr:

Satz 3.3.10. *Sei d der Grad einer irreduziblen Darstellung einer Gruppe G und $A \subseteq G$ eine Abelsche Untergruppe. Es gilt*

i) $d \leq \frac{|G|}{|A|}$ *und*

ii) wenn $A \trianglelefteq G$ zusätzlich ein normalteiler ist, dann teilt $d \mid \frac{|G|}{|A|}$.

Wir werden es nicht beweisen. Den Beweis kann man bei Serre finden. Da $G \subseteq G$, folgt von Teil i) unter anderem, dass jede irreduzible Darstellung einer Abelschen Gruppe eindimensional ist.

3.3.3 Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen

Das Ziel von diesem Abschnitt ist es zu beweisen, dass die Anzahl der Isomorphieklassen der irreduziblen Darstellungen gleich $|G_c|$ ist.

Lemma 3.3.11. *Für eine Klassenfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ und einer beliebigen Darstellung V ist $F = F_g : V \to V$, gegeben durch*

$$F(v) = \sum_{x \in G} f(x)xv,$$

mit $v \in V$, ein Darstellungshomomorphismus. Wenn V zusätzlich irreduzibel ist, dann gilt

$$F(v) = \lambda v, \ v \in V,$$

wobei

$$\lambda = \frac{|G|}{\dim V} < \overline{f}, \chi_V > .$$

Beweis. Sei $x \in G$. Es gilt

$$\begin{aligned}
F(xv) &= \sum_{g \in G} f(g)gxv \\
&= x \sum_{g \in G} x^{-1} f(g)gxv \\
&= x \sum_{g \in G} f(g)x^{-1}gxv \quad (\star) \\
&= x \sum_{g,y,x^{-1}gx=y} f(g)yv \quad (\text{da } y \text{ eindeutig durch } g \text{ definiert ist}) \\
&= x \sum_{y} f(xyx^{-1})yv \quad (\text{da } g \text{ eindeutig durch } y \text{ definiert ist}) \\
&= x \sum_{y} f(y)yv \quad (\text{da } f \text{ eine Klassenfunktion ist}) \\
&= xF(v).
\end{aligned}$$

Für $(\star)$ merke man, dass ρ_z ein Vektorraumhomomorphismus ist und sich daher mit Elemetnen des Köpers wohl benimmt. Sprich, für alle $z \in G$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\rho_z(\lambda v) = \lambda \rho_z(v)$. Es folgt, dass F ein Darstellungshomomorphismus ist.

Sei V irreduzibel. Teil ii) vom Lemma von Schur 2.4.4 besagt die Existenz einer komplexen Zahl λ, so dass $F(v) = \lambda v$ für jeden $v \in V$. Als solches ist $F = \lambda \cdot \mathsf{Id}$. Wir erhlaten

$$\begin{aligned}\lambda \dim(V) &= \mathsf{Sp}(\lambda \cdot \mathsf{Id}) \\ &= \mathsf{Sp}(F) \\ &= \sum_{g \in G} \mathsf{Sp}(f(g)\rho(g)) \\ &= \sum_{g \in G} f(g)\chi_V(g) \\ &= |G| < \overline{f}, \chi_V >,\end{aligned}$$

woraus nun die Aussage folgt. □

Satz 3.3.12. *Die Zahl n der Isomorphieklassen von irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe G ist gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von G. In Formeln ausgedrückt*

$$s = |G_c|.$$

Beweis. In Satz 3.1.27 haben wir gezeigt, dass im Hermitischem Raum $\mathcal{C}(G)$ die Charaktere der Isomorphieklassen von irreduziblen Darstellungen eine orthogonale Basis bilden. Es bleibt zu zeigen, dass diese auch den Vekotrraum $\mathcal{C}(G)$ erzeugen. Hierfür reicht es aus zu beweisen, dass wenn $\psi \in \mathcal{C}(G)$ orthonormal zu jedem Charakter von irreduziblen Darstellungen ist, dann $\psi = 0$ gilt.

Sei ψ so gewählt. Da der Charakter einer jeden Darstellung eine Linearkombinatin von Charaktären von irreduziblen Darstellungen ist (sieh Formel (13)), folgt, dass ψ orthogonal zu jeder Darstellung ist. Lemma 3.3.11, auf die Funktion $f(g) = \overline{\psi(g)}$ angewendet, impliziert, dass für jeden G-Modul B an jedem $v \in V$, gilt

$$\sum_{g \in G} \overline{\psi(g)} gv = 0.$$

Sei $V = V_{reg}$ die reguläre Darstellung und $v = 1 \in G \subseteq V_{reg}$. Wir erhalten

$$0 = \sum_{g \in G} \overline{\psi(g)} g \cdot 1 = \sum_{g \in G} \overline{\psi(g)} g.$$

Da die Elemente $g \in G$ bei Definition linear unabhängig in $\mathbb{C}[G] = V_{reg}$ sind, muss $\overline{\psi(g)} = 0$ für jeden $g \in G$ sein und $\psi = 0$. □

3.3.4 Spaltenorthogonalität von Charaktären

Sein $g \in G$ und c_g die Anzahl der Elemente in $\overline{g}$, sprich, die Anzahl der $h \in G$, so dass $g \sim_G h$. Wir definieren $\delta_g : G \to \mathbb{C}$ durch

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } h \sim_G g \\ 0 & \text{wenn } h \nsim_G g. \end{cases}$$

Es ist klar, dass δ_g eine Klassenfunktion ist. Da laut Satz 3.1.27 die Charaktere von irreduziblen Darstellungen eine orthonormale Basis der Klassenfunktionen (als Vektorraum aufgefasst) formen, gibt es komplexe Zahlen $\alpha_1, \cdots \alpha_s$, so dass

$$\delta_g = \alpha_1 \chi_1 + \cdots + \alpha_s \chi_s.$$

Wie in jeder orthonormalen Basis gilt

$$\alpha_i = < \overline{\chi}_i, \delta_g > .$$

Bei Definition des Hermiteschen Produkts von Klassenfunktion gilt

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\overline{\chi_i(h)}\delta_g(h)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G, h\sim_G g}\overline{\chi_i(h)}\\ &= \frac{c_g}{|G|}\overline{\chi_i(g)}.\end{aligned}$$

Als solches können wir die obige Gleichung als

$$\delta_g = \frac{c_g}{|G|}\sum_{i=1}^{s}\overline{\chi_i(g)}\chi_i$$

umschreiben. Man werte diese Gleichung nun bei $h \in G$ aus und erhalte

$$\begin{aligned}\frac{c_g}{|G|}\sum_{i=1}^{s}\overline{\chi_i(g)}\chi_i(g) &= 1\\ \sum_{i=1}^{s}\overline{\chi_i(g)}\chi_i(h) &= 0,\end{aligned}$$

sofern g und h nicht konjugiert sind. Dies wird *Spaltenorthogonalität von Charaktertabellen* genannt.

Zusammenfassung: Orthogonalität Sein $U_1 \dots U_s$ alle paarweise, nicht isomorphe, irreduzible Darstellungen einer Gruppe G mit $\chi_1, \dots, \chi_s$ die dazugehörigen Charakteren. Wir fassen Abschnitt 3.3.4 und Satz 3.1.27 wie folgt zusammen:

Satz 3.3.13. *Es gilt*

$$\sum_{g\in G}\overline{\chi_i(g)}\chi_j(g) = \begin{cases}|G| & \text{wenn } i = j\\ 0 & \text{wenn } i \neq j.\end{cases}$$

und

$$\sum_{i=1}^{s}\overline{\chi_i(g)}\chi_i(x) = \begin{cases}\frac{|G|}{c_g} & \text{wenn } x \sim_G g\\ 0 & \text{wenn } x \not\sim_G g.\end{cases}$$

Man erinnere sich auch an Korollar 3.3.8 (und Satz 3.3.10).

3.3.5 Kanonische Darstellungen

Das Ziel dieser Abschnitt ist es zu beweisen, dass jede Darstellung V eine kanonische Dekomposition hat, was zu den Charakteren der irreduziblen Darstellungen korrespondiert.

Proposition 3.3.14. *Sein $\chi_1, \dots, \chi_s$ und $d_1, \dots, d_s$ die zu $U_1, \dots, U_s$ korrespondierenden Charaktäre und Dimensionen respektive, V eine Darstellung von G und*

$$p_1, \cdots, p_s : V \to V$$

Abbildungen, welche durch

$$p_i(v) = \frac{d_i}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{\chi_i(x)}xv, \quad i = 1, \cdots, s.$$

gegeben werden. Es gilt

$$p_i p_j = \begin{cases}p_i, & i = j\\ 0, & i \neq j\end{cases}$$

und

$$V = \mathsf{Bild}(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathsf{Bild}(p_s).$$

Des weiteren ist $\mathsf{Bild}(p_i)$ *isomorph zu der direkten Summe von den Kopien der* U_i*'s. Diese Dekomposition ist kanonisch in dem Sinne, dass wenn* V' *eine andere Darstellung ist und* $p'_1, \cdots, p'_n$ *die korrespondierenden Endomorphismen, dann bildet bei der Einschränkung eines jeden Homomorphismus von Darstellungen* $g : V \to V'$*, ein Summand* $\mathsf{Bild}(p_i)$ *auf einem Summanden* $\mathsf{Bild}(p'_i)$ *ab. Als solches zerlegt sich* g *als die direkte Summe*

$$g = g_1 \oplus \cdots \oplus g_s,$$

wobei $g_i : \mathsf{Bild}(p_i) \to \mathsf{Bild}(p'_i)$ *die Einschränkung von* g *ist.*

Beweis. Wir benutzen Proposition 3.3.11 auf $f = \overline{\chi_i}$ angewendet. Dies ergibt nun ein Darstellungshomomorphismus $F = p_i : V \to V$, welches durch $p_i(v) = \sum_{g \in G} \chi_i(g) gv$ gegeben ist. Laut Korollar 2.4.5 ist $F(V_i) \subseteq V$ eine irreduzible Unterdarstellung und somit muss laut dem Lemma von Schur 2.4.4, $F(V_i) \simeq V_i$ oder $F(V_i) = 0 \subseteq V_i$ sein. In beiden Fällen erhalten wir durch das Einschränken auf V_i einen Endomorphismus $F_i : V_i \to V_i$, welches laut Lemma 3.3.11 von der Form $F_i(v) = \lambda v$ sein muss, mit $\lambda = \frac{|G|}{d_i} < \overline{f}, \chi_{V_i} >$. (Unter anderem sieht man damit, dass F nicht die Nullabbildung ist und somit $F(V_i) \simeq V_i$.) Da aber $\overline{f} = \chi_i$ ist $< \overline{f}, \chi_{V_i} >= 1$ und daher $\lambda = \frac{|G|}{d_i}$. Definiere nun $p_i := \frac{d_1}{|G|} F$. Es folgt, dass $p_i = \mathsf{Id}$ auf V_i eingeschränkt und Null überall. Sprich $p_i(v) = \begin{cases} v & v \in V I_i \\ 0 & v \notin V_i \end{cases}$.

Der Rest der Aussage folgt nun direkt. □

4 Finden der irreduziblen Darstellungen

4.1 Irreduzible Darstellungen des Produkts

Man nehme an, dass wir alle irreduzible Darstellungen von G_1 und G_2 kennen. Wir wollen in diesem Abschnitt erklären, wie wir alle irreduziblen Darstellungen von $G = G_1 \times G_2$ finden.

Sein V und W Darstellungen von G_1 respektive G_2 vom Grad k_1 bzw. k_2. Wir definieren eine Darstellung

$$U = V \otimes W$$

durch

$$(x_1, x_2) v \otimes w := (x_1 v) \otimes (x_2 w)$$

auf (die Basiselemente von) $G = G_1 \times G_2$ vom Grad $k = k_1 k_2$. Den Spezialfall $G_1 = G_2$ haben wir im Abschnitt 2.2.3 kennengelernt. Dort haben wir $g(v \otimes w)$ statt $(g, g)(v \otimes w)$ geschrieben.

Lemma 4.1.1. *Auch für den verallgemeinerten Fall gilt*

$$\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W.$$

Beweis. Aufgabe **??**. □

Proposition 4.1.2. *Sein* $V_1, \ldots, V_n$ *und* $W_1 \ldots, W_m$ *die Menge alle nicht-isomorpher, irreduzibler Darstellungen von* G_1 *und* G_2 *respektive. Dann ist* $\{V_i \otimes W_j\}_{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m}$ *die Menge aller nicht-isomorpher, irreduzibler Darstellungen von* $G = G_1 \times G_2$*.*

Beweis. Sei V eine Darstellung von G_1 und W eine Darstellung von G_2. Lemma 4.1.1 besagt, dass wir

$$\chi_U(x_1, x_2) = \chi_V(x_1) \chi_W(x_2)$$

haben, wobei $U = V \otimes W$. Es folgt

$$\begin{aligned}
< \chi_U, \chi_U > &= \sum_{(x_1,x_2)\in G_1\times G_2} \overline{\chi_U(x_1,x_2)}\chi_U(x_1,x_2) \\
&= \sum_{x_1\in G_1}\sum_{x_2\in G_2} \overline{\chi_V(x_1)\chi_W(x_2)}\chi_V(x_1)\chi_W(x_2) \\
&= \sum_{x_1\in G_1} \overline{\chi_V(x_1)}\left(\sum_{x_2\in G_2} \overline{\chi_W(x_2)}\chi_W(x_2)\right)\chi_V(x_1) \quad \text{Da sich alles} \\
&= \sum_{x_1\in G_1} \overline{\chi_V(x_1)}\,(< \chi_W, \chi_W >)\,\chi_V(x_1) \\
&=< \chi_W, \chi_W > \sum_{x_1\in G_1} \overline{\chi_V(x_1)}\chi_{V(x_1)} \\
&=< \chi_W, \chi_W >< \chi_V, \chi_V > .
\end{aligned}$$

Wenn nun V, W irreduzibel sind, dann ist laut Proposition 3.3.2 auch U irreduzibel.

Lemma 4.1.1, zusammen mit Satz 3.3.1 besagt nun auch, dass für nicht-isomorphe W_i, W_j, auch $V_k \otimes W_i$ und $V_k \otimes W_j$ nicht isomorph sein können. (Durch Widerspruch: Man nehme deren Charakter und kürze es mit χ_{V_k}. Es folgt, dass $\chi_{W_i} = \chi_{W_j}$ was nun $W_i \simeq W_j$ impliziert.) Als solches haben wir genau $n\times m$ irreduzible Darstellungen erhalten. Da Laut Lemma 3.2.3 $G_c = (G_1)_c \times (G_2)_c$ und $|G_c|$ die Anzahl der Isomorphieklassen von irreduziblen Darstellungen ist (Satz 3.3.12), haben wir damit alle irreduziblen Darstellungen von G gefunden. □

4.2 Der Abelsche Fall

Sei G Abelsch. Bei Definition ist $a \sim_G b$ genau dann wenn $b = x^{-1}ax = a$ woraus folgt, dass jede Konjugationsklasse aus einem Elementen besteht und $G_c = G$. Als solches ist die Anzahl s der Isomorphieklassen irreduzibler Darstellungen gleich $s = n = |G|$. Die Gleichung $d_1^2 + \cdots + d_n^2 = n$ (**??**) gibt uns nun $d_1 = \cdots = d_n = 1$. Es folgt, direkt:

Proposition 4.2.1. *Jede irreduzible Darstellung einer Abelschen Gruppe G ist eindimensional und es gibt genau $n = |G|$ nicht-isomorphe solche.*

Beweis. Wir haben dies schon für Zyklische Gruppen im Abschnitt 2.1.4 bewiesen. Das Resultat kommt nun von Proposition 4.1.2. □

Ein Spezialfall haben wir im Abschnitt gehabt.

4.2.1 Eindimensionale Darstellungen

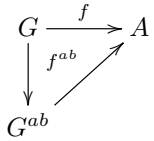
Eine eindimensionale Darstellung ist nichts als ein Gruppenhomomorphismus

$$G \to \mathbb{C}^* = \mathrm{Gl}(1).$$

Es ist immer irreduzibel (Lemma 2.4.2). Doch es gilt mehr:

Sei G^{ab} die *Abelisation* von G: Sprich G modulo der Relation $ab = ba$ für alle $a, b \in G$. Anders gesagt, das Quotient mit der Untergruppe (Normalteiler) $[G, G] := xyx^{-1}y^{-1},\ x, y \in G$. Die Abelisation hat die folgende Eigenschaft:

Lemma 4.2.2. *Sei A eine Abelsche Gruppe, G eine (beliebige) Gruppe und $f : G \to A$ ein Gruppenhomomorphismus. Es gibt genau einen Gruppenhomomorphismus $f^{ab} : G^{ab} \to A$, so dass das Dreieck*



kommutiert. Die Abbildung $G \to G^{ab}$ ist die Kanonische. Anders gesagt, wir haben eine Isomorphie

$$\mathsf{Hom}(G, A) \simeq (G^{ab}, A).$$

Beweis. □

Bemerkung 4.2.3. Eigenschaften dieser Art ("für alle [···] gibt es genau eine [···]) werden *universelle Eigenschaften* genannt und sind in der Algebra sehr wichtig. Tatsächlich kann man solche Eigenschaften öfters als Definitionen benutzen.

Da $\mathrm{Gl}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ eine Abelsche Gruppe ist, gibt es genau so viele 1-dimensionale Darstellungen von G, wie von G^{ab} (welche alle irreduzibel sind). Satz 3.3.12 und die Tatsache, dass für Abelsche Gruppen $|G_c| = |G|$, impliziert nun folgendes:

Proposition 4.2.4. *Die Anzahl der eindimensionalen Darstellungen einer Gruppe G ist gleich der Anzahl der Elemente in der Abelisation G^{ab} von G.*

4.3 Die Diedergruppen D_n

Wir betrachten die Familie der Gruppen

$$D_n = \left\langle a, b \mid a^n = b^2 = abab = 1 \right\rangle.$$

Sei durchgehend $n \geq 3$. Andernfalls ist D_n Abelsch und diesen Fall haben wir schon gelöst. Die Gruppe D_n hat Ordnung $2n$, sprich die Anzahl der Elemente ist $2n$. Sei $[g]$ das Bild von $g \in G$ in G^{ab}. Da G^{ab} natürlich Abelsch ist, folgt

$$[a] = [b^2][a] = [bba] = [bab] = [a^{-1}].$$

Es folgt $[a]^2 = 1$. Für $n = 2k+1$ ungerade folgt $1 = [a]^{2k+1} = [a]$. Bei n gerade bleibt es bei $[a]^2 = 1$. Wir erhalten

$$G^{ab} = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n = 2k+1, \quad \text{mit Erzeuger } [b], \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & n = 2k, \quad \text{mit Erzeugern } [a], [b]. \end{cases}$$

Proposition 4.2.4 besagt, dass D_n genau (für $n \geq 3$) zwei (n ungerade), bzw. vier (n gerade) 1-Dimensionale Darstellungen hat.

Nun wollen wir G_c berechnen. Hierzu erinnern wir uns, dass $b = b^{-1}$. Daher impliziert die Gleichung $baba = 1$, sprich $bab = a^{-1}$, dass $bab^{-1} = a^{-1}$, also $a \sim_G a^{-1}$ sind konjugiert. Lemma 3.2.2 besagt nun, dass

$$a^k \sim_G a^{-k} = a^{n-k}, \quad k \geq 0.$$

Des weiteren gilt auch

$$a(a^k b)a^{-1} = a^{k+1} b(bab) = a^{k+2} b.$$

Als solches ist $a^k b \sim_G a^{k+2} b$ für jeden $k \geq 0$.

Der ungerade Fall $n = 2k+1$ Es gilt

$$1^G = \{1\}; \quad (a^i)^G = \{a^i, a^{2k+1-i}\}, \ i = 1, \cdots, k;$$

$$b^G = \{b, a^2 b, \cdots, a^{2k} b\}, \quad (ab)^G = \{ab, a^3 b, \cdots, a^{2k-1} b\}.$$

Es folgt, dass wir $1 + k + 2 = k + 3$ Elemente in G_c haben. Laut Satz 3.3.12 haben wir also $k+3$ irreduzible Darstellungen, von denen nur 2 eindimensional sind. Die eindimensionalen Darstellungen sind durch

$$a \mapsto 1, \quad b \mapsto 1$$

und

$$a \mapsto 1, \quad b \mapsto -1$$

gegeben. Sein $\rho_1, \cdots, \rho_k$ die übrigen Darstellungen mit Dimensionen $d_1, \cdots, d_k$ respektive. Da

$$1^2 + 1^2 + d_1^2 + \cdots + d_k^2 = 2(2k+1)$$

(Korollar 3.3.8), folgt

$$d_1^2 + \cdots + d_k^2 = 4k.$$

Des weiteren wissen wir, dass für alle $1 \leq i \leq k$, $d_i \geq 2$. Es muss also $d_i = 2$ für alle $i = 1, \cdots, k$ gelten. Betrachte die Darstellungen

$$\rho_i(a) = \begin{pmatrix} \omega^i & 0 \\ 0 & \omega^{-i} \end{pmatrix}, \quad \rho_i(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

für $i = 1, \cdots, k$ und $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}}$. Da diese Darstellungen laut Aufgabe **??** irreduzibel sind und es genau k verschiedene solche gibt, sind wir fertig.

Der grade Falle $n = 2k$ Es gilt

$$1^G = \{1\}; \quad (a^k)^G = \{a^k\}, \quad (a^i)^G = \{a^i, a^{2k+1-i}\}, \ i = 1, \cdots, k-1,$$

$$b^G = \{b, a^2b, \cdots, a^{2k-2}b\}, \quad (ab)^G = \{ab, a^3b, \cdots, a^{2k-1}b\}.$$

In diesem Fall haben wir $1 + k + 2 = k + 3$ Elemente in G_c, von denen $k + 2$ irreduzibel sind und vier davon sind eindimensional. Diese eindimensionale Darstellungen sind

$$a \mapsto 1, \quad b \mapsto 1,$$

$$a \mapsto 1, \quad b \mapsto -1,$$

$$a \mapsto -1, \quad b \mapsto 1,$$

$$a \mapsto -1, \quad b \mapsto -1.$$

Sein $\rho_1, \cdots, \rho_{k-1}$ die übrigen Darstellungen mit Dimensionen $d_1, \cdots, d_{k-1}$. Korollar 3.3.8 besagt nun

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + d_1^2 + \cdots + d_{k-1}^2 = 2(2k)$$

und es folgt

$$d_1^2 + \cdots + d_{k-1}^2 = 4(k-1).$$

Da wieder $d_i \geq 2$, muss $d_i = 2$ für jeden $i = 1, \cdots, k$ gelten. Diese Darstellungen sind durch

$$\rho_i(a) = \begin{pmatrix} \omega^i & 0 \\ 0 & \omega^{-i} \end{pmatrix}, \quad \rho_i(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, da alle irreduzibel sind (Beispiel **??**). Wie auch oben gilt $i = 1, \cdots, k$ und $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}}$.

4.4 Die symmetrischen Gruppen S_n

Sei $n \geq 3$, da wir sonst im Abelschen Fall landen. Wir bezeichnen mit s_i die Transposition $(i\ i+1)$, $i = 1, \cdots, n-1$. Es gilt

- $s_i^2 = 1$
- $s_i s_j = s_j s_i$, für $|i-j| > 1$
- $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$.

Es ist wohlbekannt, dass die Transpositionen s_i die Gruppe S_n erzeugen.

Lemma 4.4.1. *Die Abelisation $S_n^{ab} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist die Gruppe mit zwei Elementen.*

Beweis. Sei $[\sigma]$ die Klasse von $\sigma \in S_n$ in der Abelisation. Es gilt

$$[s_{i+1}] = [s_i^2][s_{i+1}] = [s_i s_{i+1}][s_i] = [s_i s_{i+1} s_i] = [s_{i+1} s_i s_{i+1}] = [s_{i+1}]^2[s_i] = [s_i].$$

Als solches ist S_n^{ab} durch $[s_1]$ erzeugt und die Gleichung $[s_1^2] = 1$ gilt. □

Es folgt von der Proposition 4.2.4, dass S_n genau zwei eindimensionale Darstellungen hat. Diese sind die triviale (welches wir immer haben)

$$S_n \to GL_1 = \mathbb{C}^*, \quad \sigma \mapsto 1$$

und die *Signusdarstellung*, welches durch

$$S_n \to GL_1 = \mathbb{C}^*, \quad \sigma \mapsto \mathsf{sign}(\sigma) = (-1)^k$$

gegeben ist, wobei σ das Produkt von k Transpositionen ist. Da diese eindimensional sind, sind es auch irreduzibel.

4.4.1 Die Konjugationsklassen

Laut Satz 3.3.12 geht es nun darum, die Anzahl der Konjugationsklassen zu bestimmen. Dazu wollen wir die Permutation als Produkte von disjunkten Zyklen (Transpositionen) darstellen. Dazu erinnern wir uns vorerst am Begriff *Typ* einer Permutation: Wenn wir eine Permutation als Produkt von Zyklen Dargestellt haben, dann schreiben wir die Anzahl dieser Zyklen als formelle Summe auf und nennen es den Typ der Permutation. Hier darf man aber die invarianten Elemente nicht vergessen.

Als Beispiel, bei der Permutation $(143)(26)(578) \in S_8$ würden wir sagen, dass es vom Typ $3+3+2$ ist. Gleichwie ist die Permutation $(16)(253) \in S_6$ vom Typ $2+3+1$. Die 1 hier ist "versteckt" da die 4 ja invariant unter der Permutation ist. Sprich, die Identität $\mathsf{Id} \in S_n$ wäre vom Typ $\underbrace{1+\cdots+1}_{n}$ und die Transposition $(34) \in S_4$ ist vom Typ $2+1+1$.

Lemma 4.4.2. *Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ gilt*

$$\sigma(1\cdots k)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \cdots\ \sigma(k)).$$

Beweis. Sei $\tau = (1\cdots k)$ und $\sigma(i) \neq \sigma(1), \cdots, \sigma(k)$. Es folgt

$$i = \sigma^{-1}(\sigma(i)) \notin \{\sigma^{-1}(1), \cdots, \sigma^{-1}(k)\} = \{1, \cdots, k\},$$

woraus wir

$$\sigma(i) \xrightarrow{\sigma^{-1}} i \xrightarrow{\tau} i \xrightarrow{\sigma} \sigma(i)$$

schließen können, da $i \notin \{1, \cdots, k\}$ und somit $\tau(i) = i$ gilt. Auf der anderen Seite folgt aus $\sigma(i) \in \{\sigma(1), \cdots, \sigma(k)\}$, dass

$$\sigma(i) \xrightarrow{\sigma^{-1}} i \xrightarrow{\tau} i+1 \xrightarrow{\sigma} \sigma(i+1),$$

da $\tau(i) = i+1$, für $i \in \{1, \cdots, k\}$ und die Aussage folgt. □

Korollar 4.4.3. *Zwei Permutationen sind genau dann konjugiert, wenn sie vom selben Typ sind.*

Beweis. Man benutze nun Lemma 4.4.2 und die Tatsache, dass

$$\tau \mapsto \sigma\tau\sigma^{-1}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. □

Lass uns das ganze an einem Beispiel klar machen: Sein

$$\tau_1 = (143)(26)(578) \in S_8 \quad \text{und} \quad \tau_2 = (152)(38)(476) \in S_8.$$

Beide sind vom selben Typ $3+3+2$. Als solches besagt Korollar 4.4.3, dass diese konjugiert sein müssen. Um diese Konjugation aufzubauen, betrachten wir

$$\tau = (123)(45)(678),$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

und

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 8 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Es folgt $\sigma_1\tau\sigma_1^{-1} = \tau_1$, $\sigma_2\tau\sigma_2^{-1} = \tau_2$ und als solches ist $\tau_1^G = \tau^G = \tau_2^G$. Dies führt uns somit zu der folgenden Definition:

Definition 4.4.4. Eine *Zerlegung* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ einer natürlichen Zahl n ist eine Sequenz von nicht-negativen Zahlen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_k$, so dass

$$n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k.$$

Wir bezeichnen mit $\pi(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von n.

Da

$$\begin{aligned} 2 &= 2+0,\ 2=1+1 \\ 3 &= 3+0,\ 3=2+1,\ 3=1+1+1 \\ 4 &= 4+0,\ 4=3+1,\ 4=2+2,\ 4=2+1+1,\ 4=1+1+1+1 \end{aligned}$$

die einzigen Zerlegungen von $2, 3$ und 4 sind, würden wir sagen

$$\pi(2) = 2, \pi(3) = 3, \pi(4) = 5.$$

Normalerweise würden wir z.B., $4 = (2,1,1)$, anstatt $4 = 2+1+1$ schreiben. Es ist auch ein einfaches zu überprüfen, dass

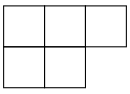
$$\pi(5) = 7, \pi(6) = 11, \pi(7) = 15, \pi(8) = 22, \pi(9) = 30.$$

Die Funktion $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wurde von Euler eingeführt und ist eines der interessanten Funktionen in der Mathematik. Schon für kleine Zahlen wird es recht groß: $\pi(100) = 190569292$.

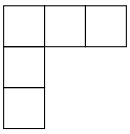
Korollar 4.4.3, zusammen mit Satz 3.3.12 besagt nun, dass die Gruppe S_n genau $\pi(n)$ nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen hat. Es geht nun darum, diese Darstellungen auch zu verstehen: Dies ist nicht einfach und als Beispiel kann man bei Fulton [**?**] oder Steinberg [**?**] so einiges darüber nachlesen. Wir werden hier "nur die Oberfläche ankratzen".

4.5 Young Diagramme

Zu einer Zerlegung $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ einer natürlichen Zahl n, können wir das folgende "Bild": Wir malen λ_1 viele Quadrate, darunter (angefangen vom Ersten) malen wir λ_2 viele Quadrate und so weiter. Dies wird ein *Young Diagramm* genannt. Zum Beispiel, würden wir zu $5 = (3, 2)$ den Diagramm

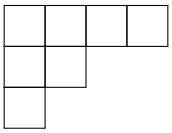


assoziieren. Für $5 = 3 + 1 + 1$ würden wir

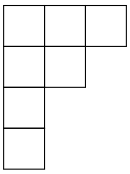


zeichnen. Aus der Definition einer Zerlegung folgt direkt, dass die Anzahl der Quadrate mit jeder Zeile abnimmt (kleiner gleich ist). Es ist auch klar, dass solche absteigende Diagramme und Zerlegungen in einer eins-zu-eins Beziehung sind. Als solches werden wir diese ab jetzt gleichsetzen.

Die konjugierte Zerlegung Sei λ eine Zerlegung, beziehungsweise, das dazu assoziierte Zerlegung. Zu jedem Diagramm kann man nun ein neues Diagramm zuordnen, indem man es auf der Hauptdiagonalen reflektiert. Äquivalent, indem man die Reihen und Zeilen vertauscht. Da wir immer von der linken Seite mit den Quadraten anfangen, ist es klar, dass auch dies Absteigend sein wird. Als solches kann man nun dazu eine Zerlegung λ^T zuordnen und diese wird die konjugierte Zerlegung genannt. Als Beispiel, die zu $\lambda = (4, 2, 1)$



konjugierte Zerlegung ist $\lambda^T = (3, 2, 1, 1)$



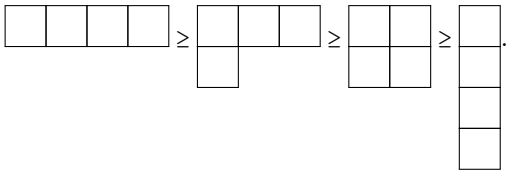
Eine Ordnung auf Zerlegungen

Definition 4.5.1. Sein $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m,)$ zwei Zerlegungen. Wir sagen λ dominiert μ, geschrieben $\lambda \geq \mu$, wenn für jeden $i \geq 1$, gilt

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i.$$

Wie erwartet gilt $\lambda_{n+j} = 0$ und $\mu_{m+k} = 0$.

Wenn zum Beispiel wir $\lambda = (4, 2, 1)$ nehmen (wie oben), dann dominiert es sein konjugiertes, sprich $t^\lambda \geq t^{\lambda^T}$. Das liegt daran, dass $4 \geq 3$, $4+2 \geq 3+2$, $4+2+1 \geq 3+2+1$ und $4+2+1+0 \geq 3+2+1+1$.

Beispiel 4.5.2. Es gilt .

Proposition 4.5.3. *Die Relation auf Definition 4.5.1 ist eine (partielle) Ordnungsrelation: Sprich es gilt*

Reflexiv:

Anty-Symmetrisch:

Transitiv:

Beweis. □

Young Tabellen und Tafeln

Definition 4.5.4. Eine *Young Tabelle* (Young tableaux) ist ein Young Diagram, wo in jedem Quadrat eine natürliche Zahl zwischen 1 und n steht. Diese dürfen nicht wiederholt werden. Hier ist n die Anzahl der Quadrate des Young Diagramms.

Wenn λ eine Zerlegung ist und t eine Sequenz von n natürlichen Zahlen, dann wird mit λ^t die dazu korrespondierende Tabelle bezeichnet. Als Beispiel wären folgende Young Tabelle:

1	2	3	4
5	6		
7			

6	4	3	1
2	7		
5			

Es ist direkt ersichtlich, dass es genau $n!$ viele Young Tabellen zu jeden Young Diagramm der Größe n gibt. Es gilt die folgende Aussage, welches wir nicht beweisen werden:

Proposition 4.5.5. *Sein λ und μ Zerlegungen von n und m respektive. Wenn Young Tabellen λ^t und μ^s gibt, so dass alle Zahlen in allen Zeilen von μ^s in verschiedenen Spalten von λ^t stehen dann ist $\lambda \geq \mu$.*

Als Beispiel betrachte man $\lambda = (5, 2, 1)$ und $\mu = (3, 2, 2)$. Wir haben $\lambda \geq \mu$ und tatsächlich können wir folgende Tabellen aufschreiben:

$t^\lambda =$

8	5	4	2	7
1	3			
6				

$t^\mu =$

1	2	3	4
5	6		
7	8		

Man merke, dass keine zwei Zahlen keiner Zeile von t^μ in der selben Spalte von t^λ vorkommen.

Konstruktion einer Darstellung Auf der Menge der Young Tabellen führen wir eine Äquivalenzrelation wie folgt ein: Zwei Tabellen einer (der selben) Zerlegung λ werden als gleich angesehen, wenn sie in jeder Zeile die selben Einträge haben. Die Ordnung dieser Einträge kann natürlich variieren. Als Beispiel

8	5	4	2	7
1	3			
6				

und

7	4	5	8	2
3	1			
6				

sind äquivalent. Es ist nun klar, dass für eine Zerlegung $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, wir genau $S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_n}$ äquivalente Tabellen haben.

Definition 4.5.6. Die Äquivalenzklasse einer Young Tabelle t unter der obigen Relation wird Young Tafel (Young tabloid) genannt und mit $[t]$ bezeichnet.

Da natürlich unter dieser Relation nur zwei Tabellen gleich werden können, wenn die Zerlegungen gleich sind, sparen wir uns normalerweise das λ bzw. μ und schreiben es einfach als $[t]$, nicht $[t^\lambda]$. Für einen fixierten λ bezeichnen wir mit T^λ die Menge aller Äquivalenzklassen $[t] = [t^\lambda]$ der Form λ. Es gibt eine ganz besondere Tabelle, nämlich, wo wir im i'ten Quadrat i eintragen. Sprich, die Tabellen der Form

1	2
3	4

1	2	3	4
5	6		
7	8		

Für einen fixierten λ, wir mit T_λ die Äquivalenzklasse (also die Tafel) dieser Tabelle bezeichnet.

Sei λ eine Zerlegung von n. Da die Symmetriegruppe S_n auf $\{1, \dots, n\}$ wirkt, erhalten wir eine Wirkung von S_n auf der Menge aller λ-förmigen Tabellen. Diese Wirkung ist klar Transitiv (sprich, jedes Element kann mit einer Gruppenwirkung auf ein anderes überführt werden).

Lemma 4.5.7. *Die natürliche Wirkung von S_n auf die Menge der Young Tabellen induziert eine transitive Wirkung von S_n auf der Menge T^λ.*

Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Der Stabilisator der Tafel T_λ unter der Wirkung von S_n wird mit S_λ bezeichnet und es gilt

$$S_\lambda = S_{\{1,\dots,\lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1,\dots,\lambda_1+\lambda_2\}} \times \cdots \times S_{\{\lambda_1+\cdots+\lambda_{k-1}+1,\dots,\lambda_k\}}.$$

Wie schon oben erwähnt folgt direkt

$$|T^\lambda| = |S_n/S_\lambda| = \frac{n!}{\lambda_1! \cdot \cdots \cdot \lambda_k!}.$$

Die Untergruppe S_λ wir die *Young Untergruppe assoziiert zu* λ genannt.

Sei $\varphi^\lambda : S_n \to \mathrm{Gl}(\mathbb{C}[T^\lambda])$ die Permutationsdarstellung, assoziiert zu der oben definierten Wirkung von S_n auf T^λ. Für $\lambda = (\lambda)$, sprich, wenn es eine nichttriviale Zerlegung ist, dann ist φ^λ nicht irreduzibel. Es hat jedoch einen ausgesonderten irreduziblen Komponenten, was die Sprecht Darstellung genannt wird. Das Ziel ist es nun, diese Darstellung zu konstruieren.

Konstruktion der irreduziblen Darstellungen - Die Sprecht Darstellung Für eine Zerlegung λ von n haben wir die Untergruppe S_λ von S_n, basierend auf die Symmetrie der Zeilen der "kanonischen" Young Tabelle (sprich, wo im i'ten Box die Zahl i steht) definiert. Natürlich kann man dies auch mit den Spalten machen (und natürlich für eine beliebige Tabelle). Sei daher $t = t^\lambda$ eine Young Tabelle und definiere die Untergruppe $C_t \subseteq S_n$, wobei $\sigma \in C_t$ genau dann, wenn $\sigma(i)$ wieder in der selben Spalte ist wie i, für alle $1 \le i \le n$.

Definition 4.5.8 (Polytafel (Polytabloid))**.** Für eine Tabelle t^λ definiere

$$e_t \coloneqq \sum_{\pi \in C_t} \mathsf{Sgn}(\pi)\pi[t].$$

Dies wird die Polytafel (Polytabloid) genannt.

Sei, zum Beispiel, $t =$

2	3	1
7	6	
4	5	

. Dann ist $C_t = S_{\{2,4,7\}} \times S_{\{3,5,6\}} \times S_{\{1\}} \subseteq S_{\{1,2,3,4,5,6,7\}}$.

Definition 4.5.9 (Sprecht Darstellung)**.** Für eine Zerlegung λ von n definieren wir den Untervektorraum von $\mathbb{C}[T^\lambda]$, erzeugt mit den e_t's aus Definition 4.5.8, wobei wir durch alle Tabellen durchlaufen.

Es ist nicht zu schwer zu beweisen, dass dies tatsächlich eine Unterdarstellung ist. [**?**, Proposition 10.2.9]. Deutlich schwerer ist es zu beweisen, dass dies irreduzibel ist. [**?**, Cor. 10.2.14]. Mehr als das, jede irreduzible Darstellung kann auf diese Art und weise erhalten werden und diese Darstellungen sind genau dann isomorph, wenn die Young Diagramme (Zerlegungen) gleich sind [**?**, 10.2.17].

Die Hacken-Formel Es ist nicht besonders einfach, die Sprecht Darstellungen explizit aufzuschreiben. Dies ist recht klar bei "großen" n, (da $S(10)$ schon riesig ist), aber auch schon bei S_4 macht es keinen Spaß. Man merkt schon, dass es sehr viele Tabellen gibt und es ist klar, dass die verschiedenen e_t's nicht alle linear unabhängig sind. *Ich glaube* (und bin mir hier überhaupt nicht sicher), dass es ausreicht, sich nur die e_t's für nicht äquivalente ts anzuschauen, sprich, die verschiedene Tafeln definieren. Aber auch so hätten wir noch zu viele. Es gibt jedoch eine sehr einfache (zum Anwendung, etwas schwerer zum beweisen) kombinatorische Möglichkeit, die Dimension der zu einer Zerlegung zugehörigen irreduziblen Darstellung zu berechnen. Dies geht wie folgt:

Sei λ eine Zerlegung von n und man male es als ein Young Diagramm. An jeder stelle, schreibe die Anzahl der Quadrate q_i, welche links der gegebenen Stelle stehen und unten (sich selber mit eingeschlossen, aber nur einmal), wie in den folgenden Beispielen.

6	5	3	1
4	3	1	
2	1		

,

8	6	4	3	1
6	4	2	1	
3	1			
1				

.

Nun ist die Dimension der Sprecht Darstellung gegeben durch

$$\dim(U) = \frac{n!}{\prod q_i}.$$

In unseren Beispielen wären dies

$$\frac{9!}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 4\cdot 3\cdot 2} \quad \text{und} \quad \frac{12!}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 3\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot 3}.$$

Die Standarddarstellung Wir wollen nun die zu $n = (n-1)+1$ korrespondierende irreduzible Darstellung von S_n konstruieren. Dies wird die *Standarddarstellung* von S_n genannt. Das dazu korrespondierende Modul werden wir mit $V_{n-1,1}$ bezeichnen. Als Vektorraum gilt

$$V_{n-1,1} = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0.\}$$

Es ist von Dimension $(n-1)$ und besteht aus allen Vektoren der Form $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, so dass $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$ gilt. Die Gruppe S_n wirkt auf diese Vektoren durch das Permutieren der Koordinaten.

Wir wollen nun den dazu korrespondierenden Charakter berechnen. Hierzu bemerken wir zuerst, dass

$$e_1 = (1, -1, 0, \cdots, 0), \quad \cdots, \quad e_{n-1} = (0, \cdots, 0, 1, -1)$$

eine Basis von $V_{n-1,1}$ bilden. Für $1 < i < n-1$ ist e_i das Vektor, welches nur zwei Koordinate ungleich Null hat, nämlich in den Dimensionen i und $i+1$. Es folgt

$$s_i e_j = \begin{cases} e_j & i < j-1, \\ e_{j-1} + e_j & i = j-1, \\ -e_j, & i = j, \\ e_j + e_{j+1} & i = j+1 \\ e_j & i > j+1. \end{cases}$$

Somit gilt für die Standarddarstellung

$$\rho_{\mathsf{St}}(s_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-3}, \end{pmatrix}$$

wobei I_{n-3} die Identitätsmatrix der Dimension $n-3 \times n-3$ ist. Des weiteren gilt für $1 < i < n-1$

$$\rho_{\mathsf{St}}(s_i) = \begin{pmatrix} I_{i-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-i-2} \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mathsf{St}}(s_{n-1}) = \begin{pmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1. \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir den Charakter der Standarddarstellung. Sei $\sigma \in S_n$ beliebig. Wir können dies als ein Produkt von disjunkten Zyklen darstellen. Man nehme an, dass es m Symbole erhält. Wir behaupten, dass

$$\chi_{\mathsf{St}}(\sigma) = n - 1 - m.$$

Sei, zum Beispiel, $n = 8$ und $\sigma = (156)(48)$. Dann ist $m = 5$ und $\chi_{\mathsf{St}}(\sigma) = 8 - 1 - 5 = 2$.

Um die Behauptung zu beweisen, betrachten wir das G-Modul $\mathbb{C}^n$, mit der gewohnten Permutationswirkung auf den Koordinaten. Es ist klar, dass wir eine Isomorphie von Darstellungen

$$\mathbb{C}^n = V_{n-1,1} \oplus V$$

haben, wobei V aus der Menge der Vektoren $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ besteht, für die gilt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$. Wie erwähnt haben wir auf $\mathbb{C}^n$ eine Permutationswirkung von S_n. Es auch klar, dass V eindimensional ist. Es folgt

$$\chi_{\mathbb{C}^n} = \chi_{\mathsf{St}} + \chi_{triv}$$

und der Rest folgt nun von Lemma 3.3.4.

Als nächstes wollen wir beweisen, dass es irreduzibel ist für alle $n \geq 2$. Dies wird per Induktion gemacht. Der Fall $n = 2$ ist klar, da $V_{2-1,1}$ eindimensional ist. Sei daher $n \geq 3$ und $W \subset V_{n-1,1}$ eine nichttriviale Unterdarstellung. Es gilt zu zeigen, dass $W = V$. Als solches ist W ein Untervektorraum und aus $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in W$ folgt, dass für eine beliebige Permutation $\sigma \in S_n$, wir $(\lambda_{\sigma(1)}, \cdots, \lambda_{\sigma(n)}) \in W$ haben.

Um zu beweisen, dass $V_{n-1,1} = W$, verfahren wir wie folgt: Sei $0 \neq (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in W$. Bei Annahme gilt $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$. Es folgt, dass zumindest zwei λ_i ungleich Null sind. Da W unter der Permutation der Koordinaten abgeschlossen ist, dürfen wir annehmen, dass $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$. Da W ein Untervektorraum ist, muss es auch $\lambda_1(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ enthalten. Wir dürfen daher annehmen, dass ein Vektor der Form $(1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, mit $\lambda_2 \neq 0$ in W liegt. Durch das Permutieren der Koordinaten erhalten wir $(\lambda_2, 1, \cdots, \lambda_n) \in W$ und daher $(1, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_1^{-1}\lambda_n) \in W$. Da W ein Untervektorraum ist, ist es auch unter der Differenz abgeschlossen. Wir folgern, dass $(0, \mu_2, \cdots, \mu_n) \in W$. Es folgt $(\mu_2, \cdots, \mu_n) \in V_{m-1,1}$, wobei $m = n - 1$ und S_{n-1} als eine Teilmenge von S_n aufgefasst wird, indem man die erste Koordinate fixiert. Es folgt, dass laut unserer Annahme $W \cap V_{m-1,1} = V_{m-1,1}$ und als solches gilt $(0, 1, -1, \cdots, 0) \in W$. Durch das Permutieren der Koordinate folgern wir

$$(1, -1, 0, \cdots, 0) \in W, \quad (0, 1, -1, \cdots, 0) \in W, \ \cdots, \ (0, 0, \cdots, 1, -1) \in W.$$

Diese Elemente jedoch formen eine Basis von $V_{n-1,1}$ und da W ein Untervektorraum war, muss $W = V_{n-1,1}$ und daher die Irreduzibilität von $V_{n-1,1}$ folgern.

5 Der Satz von Frobenius

Sei $\Theta(G)$ wie im Abschnitt 0.1.2 als die Determinante der Gruppenmatrix $(T_{gh^{-1}})$ definiert. Wie schon erwähnt wollen wir dies nun in irreduziblen Komponenten zerlegen. Unser Ziel ist es nun, Satz 5.3.1, was Satz 0.3.1 einschließt, zu beweisen. Dazu werden wir aber noch einige Lemmas brauchen.

Als erstes wollen wir $\Theta(G)$ mit der Darstellungstheorie von endlichen Gruppen in Verbindung bringen. Dazu führen wir eine Familie von Polynomen $\Theta_\rho(G)$ ein, indexiert durch die Darstellungen $\rho : G \to GL(n)$ von G. Als nächstes werden wir dann Charaktere mit "höheren Charakteren" verallgemeinern.

5.1 Die Polynome $\Theta_\rho(G)$

Für eine Darstellung $\rho : G \to GL(n)$ definieren wir $\Theta_\rho(G)$ als die Determinante der Matrix $\sum_{x\in G} T_x\rho(x)$. Das folgende Lemma beweist, dass wir auf dieser Art und Weise tatsächlich $\Theta(G)$ zurückgewinnen können:

Lemma 5.1.1. *Für die reguläre Darstellung $\rho = \rho_{reg}$ gilt*

$$\Theta(G) = \Theta_{\rho_{reg}}(G).$$

Beweis. Bei Definition der regulären Darstellung ist $\rho_{reg}(x)$ das Endomorphismus von $\mathbb{C}[G]$, welches durch die Multiplikation (von der linken Seite) mit $x \in G$ gegeben wird. In der Standardbasis $\{g, g \in G\}$ ist dieser Endomorphismus durch die Matrix $\rho_{reg}(x)$ gegeben, wessen (g,h)-ter Eintrag durch $\begin{cases} 0 & x \neq gh^{-1} \\ 1 & x = gh^{-1} \end{cases}$ gegeben ist. Es folgt, dass der (g,h)-te Eintrag von $\sum_{x\in G} T_x\rho_{reg}(x)$ genau $T_{gh^{-1}}$ ist, was nun die Aussage impliziert. □

5.2 Die höheren Charaktere

Sei $\chi : G \to \mathbb{C}$ ein Charakter. Für $n \geq 2$ definieren wir $\chi^{(k)} : G^k \to \mathbb{C}$ durch Induktion als

$$\chi^{(2)}(g,h) = \chi(g)\chi(h) - \chi(gh),$$

$$\chi^{(k+1)}(g_1,\cdots,g_{k+1}) = \chi(g_1)\chi^{(k)}(g_2,\cdots,g_{k+1}) - \chi^{(k)}(g_1g_2,\cdots,g_{k+1}) - \cdots - \chi^{(k)}(g_2,\cdots,g_1g_{k+1})$$

Als Beispiel wäre

$$\chi^3(x,y,z) = \chi(x)\chi(y)\chi(z) - \chi(x)\chi(yz) - \chi(xy)\chi(z) - \chi(y)\chi(xz) + \chi(xyz) + \chi(xzy).$$

Wir werden auch die Notation $\chi^{(1)}$ für χ benutzen.

Bemerkung 5.2.1. Hier sollte gesagt werden, dass obwohl es so scheint, als ob die Charaktere (also χ^1) die höheren Charaktere (also $\chi^n, n \geq 2$) wiedergeben würden, ist dies *nicht* der Fall. Der Grund dafür ist, dass die Gruppenstruktur hier "versteckt" vorkommt: Schon bei χ^2 haben wir den Term $\chi(gh)$. Daher spielt die Verknüpfung der Gruppe eine wichtige Rolle. Da χ natürlich kein Gruppenhomomorphismus ist (für Darstellungen vom Grad streng höher als eins), bzw. G_c keine Gruppe ist, wird der Wert $\chi^2(g,h)$ von der Gruppe abhängen. In anderen Worten, wenn zwei verschiedene Gruppen G und H die selben Charaktere haben (z.B., D_4 und Q_8), heißt es nicht, dass auch die höheren Charaktere gleich sein werden. Tatsächlich unterscheiden die höheren Charaktere die Gruppen (?).

5.3 Der Determinantensatz

Satz 5.3.1. *i) Sei G eine endliche Gruppe und $U_1,\cdots,U_s$ alle paarweise nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen von G. Es gilt*

$$\Theta(G) = \prod_{i=1}^{s} \Theta_{U_i}(G)^{d_i},$$

wobei $d_i = dim(U_i)$, $i = 1,\cdots,s$.

ii) Für eine irreduzible Darstellung V von G mit $\dim(V) = d$ gilt $\chi_v^{(k)} = 0$ für alle $k > d$ und

$$\Theta_V(G) = \frac{1}{n!} \sum_{(x_1,\cdots,x_d)\in G^d} T_{x_1}\cdots T_{x_d}\chi_V^{(d)}(x_1,\cdots,x_d).$$

5.3.1 Beweis des ersten Teils

Lemma 5.3.2. *Sei $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ eine direkte Summe von Darstellungen. Es gilt*

$$\Theta_\rho(G) = \Theta_{\rho_1}(G) \cdot \Theta_{\rho_2}(G).$$

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A)\det(B)$$

□

Der erste Teil vom Satz 5.3.1 folgt nun von den Lemmas 5.3.2 und 3.3.6.

5.3.2 Bewies des zweiten Teils

Dazu müssen wir klar die $\Theta_{U_i}(G)$'s berechnen.

Der eindimensionale Fall Sei $U_i = U$ eine eindimensionale Darstellung, gegeben durch $\rho : G \to \mathbb{C}^*$. Da für eine 1×1 Matrix die Spur, die Determinante und die Matrix selber miteinander übereinstimmen haben wir

$$\Theta_U(G) = \det(\sum_{x \epsilon G} T_x \rho(x)) = Tr(\sum_{x \epsilon G} T_x \rho(x)) = \sum_{x \epsilon G} T_x \chi_\rho(x). \tag{15}$$

Sei G Abelsch. Dann ist jede Darstellung eindimensional 4.2.1. Somit impliziert Satz 5.3.1 genau den Satz von Dedekinnd 0.2.1.

Der zweidimensionale Fall Wir wollen nun den nicht-Abelschen Fall besser verstehen: Sprich, $\Theta_U(G)$ für $dim U > 1$. Dazu müssen wir die höheren Charaktere verstehen. Vorerst bemerken wir aber folgende Formel:

Lemma 5.3.3. *Sei A eine 2×2 Matrix. Dann gilt*

$$2\det(A) = \mathsf{Sp}(A)^2 - \mathsf{Sp}(A^2).$$

Beweis. Dies kann natürlich direkt per Hand überprüft werden. Es gibt jedoch einen "eleganteren" Argument, welches auch für höherdimensionale Matrizen gilt:
Sei A eine Diagonalmatrix, sprich $A = \mathsf{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Dann ist die Aussage nur die binomische Formel.
Im Allgemeinen, betrachten wir die Determinante von A als ein Element der $\mathbb{C}$-Algebra $\mathbb{C}[\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}]$. Als solches ist dies eine Varietät. Wir erinnern uns, eine Matrix, dessen alle Eigenwerte verschieden sind, diagonalisierbar ist (Satz 3.1.1). Die Eigenwerte sind aber genau dann alle verschieden, wenn die Diskriminante des charakteristischen Polynoms gleich Null ist. In anderen Worten, wenn es das Komplement einer Varietät in der Zariski Topologie ist, sprich offen in der Zariski Topologie. Offen in der Zariski Topologie (und ungleich der leeren Menge, was hier klar erfüllt ist) jedoch bedeutet Dichtheit. Nun ist zwar Satz 3.1.1 keine "genau dann" Aussage, jedoch bedeutet dies nur, dass die Teilmenge der diagonalisierbaren Matrizen noch größer sein kann. Doch dies wäre natürlich auch dicht.

Wir fassen unsern Argument zusammen und sagen, dass die diagonalisierbare Matrizen dicht in der Zariski Topologie sind. Da aber für ähnliche Matrizen die Spur und Determinante gleich sind, haben wir mit unserem obigen Argument für Diagonalmatrizen schon gezeigt, dass die Gleichung des Lemmas für eine dichte Teilmenge gilt. Als solches muss die Gleichung auf der ganzen Menge gelten. □

Nun zum eigentlichen Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
2\Theta_V(G) &= 2\det\left(\sum_{g\in G} T_g\rho(g)\right)\\
&= \mathsf{Sp}\left(\sum_{g\in G} T_g\rho(g)\right)^2 - \mathsf{Sp}\left(\left(\sum_{g\in G}\rho(g)\right)^2\right) \quad \text{Lemma 5.3.3}\\
&= \left(\sum_{g\in G} T_g\rho_g\right)^2 - \mathsf{Sp}\left(\sum_{g\in G}\sum_{h\in G} T_gT_h\rho(g)\rho(h)\right)\\
&= \left(T_g\chi_\rho(g)\right)^2 - \mathsf{Sp}\left(\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\rho(gh)\right)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} T_gT_h\chi_\rho(g)\chi_\rho(h) - \left(\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\mathsf{Sp}\rho(gh)\right)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} T_gT_h\chi_\rho(g)\chi_\rho(h) - \left(\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\chi_\rho(gh)\right)\\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} T_gT_h\left(\chi_\rho(g)\chi_\rho(h) - \chi_\rho(gh)\right).
\end{aligned}$$

In anderen Worten haben wir

$$\Theta_V(G) = \frac{1}{2}\sum_{g,h\in G} T_gT_h\left(\chi_\rho(g)\chi_\rho(h) - \chi_\rho(gh)\right), \tag{16}$$

wie gewünscht, da bei Definition $\chi^2(g,h) = \chi_\rho(g)\chi_\rho(h) - \chi_\rho(gh)$. Dies schließt nun den Beweis für zweidimensionale Darstellungen ab.

Die hören Fälle werden nun als Hausaufgabe gelassen :)

5.4 Einige Beispiele

5.4.1 Die Gruppe S_3

Wir erinnern uns an Beispiel 0.3. Wir wollen beweisen, dass

$$\Theta(S_3) = \det(\mathcal{M}) = \Theta_1\Theta_2\Theta_3^2,$$

mit

$$\Theta_1 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6,$$

$$\Theta_2 = T_1 + T_2 + T_3 - T_4 - T_5 - T_6,$$

$$\Theta_3 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 - T_4^2 - T_5^2 - T_6^2 - T_1T_2 - T_2T_3 - T_1T_3 + T_4T_5 + T_4T_6 + T_5T_6.$$

Wir benutzen die Notation $T_1 = T_1$, $T_2 = T_{(123)}$, $T_3 = T_{(132)}$, $T_4 = T_{(12)}$, $T_5 = T_{(13)}$ und $T_6 = T_{(23)}$. Wie im Abschnitt 3.1.1 beschrieben, gilt

$\#$	1	3	2
$\overline{g} \in G_c$	1	(12)	(123)
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1.

Durch Gleichung (15) können wir Θ_1 und Θ_2 direkt finden. Für Θ_3 müssen wir nun in Gleichung (16) alle Möglichen Paare $g, h \in S_3$ einsetzen und aufaddieren. Als Beispiel, für $g = (12)$ ($T_{(12)} =: T_4$) und $h = (123)$ ($T_{(123)} =: T_2$) haben wir

$$T_4T_2(0 \cdot (-1) - (-1)) = T_4T_2.$$

6 Einige Anwendungen in der Gruppentheorie

Das folgende kann bei [**?**, Kapitel 4] näher nachgelesen werden.

Definition 6.0.1. Sei $\rho : G \to \mathrm{Gl}(V)$ eine Darstellung und χ_ρ der dazugehörige Charakter. Wir definieren

$$\mathsf{Ker}(\chi_\rho) := \{g \in G \mid \chi_\rho(g) = \chi_\rho(1_G)\}.$$

Lemma 6.0.2. *Es gilt* $\mathsf{Ker}(\chi_\rho) = \mathsf{Ker}(\rho)$, *wobei* $\mathsf{Ker}(\rho) : \{g \in G\}$ *wie gewohnt. Spezifisch ist* $\mathsf{Ker}(\chi_\rho)$ *ein Normalteiler von* G.

Beweis. Wie schon im Abschnitt 3.1 argumentiert ist die Matrix zu $\rho(g)$ assoziiert diagonalisierbar (für alle $g \in G$). Korollar 3.1.4 sagt auch, dass $\chi_\rho(g) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ eine Summe von Einheitswurzeln ist. Hier ist n die Dimension von V. Diese λ_k's sind auch genau die Eingenwerte, sprich $\rho(g)v_k = \lambda_k v_k$.

Wir erinnern uns an die Gleichung $e^{ti} = \cos t + i \sin t$, was uns

$$\chi_\rho(g) = \sum_{k=1}^n \cos t_k + i \sum_{k=1}^n \sin t_k$$

gibt, da die λ_k's Einheitswurzeln sind. Da $\chi_\rho(1) = \dim(V) = n$, ist $g \in \mathsf{Ker}(\chi_\rho)$ genau dann, wenn

$$n = \chi_\rho(g) = \sum_{k=1}^n \cos t_k + i \sum_{k=1}^n \sin t_k.$$

Der reelle Teil muss also gleich 1 und der Imaginäre muss gleich Null sein. Da $\cos(t) \leq 1$ impliziert also die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n \cos t_k = n,$$

dass $\cos t_k = 1$ (was auch direkt $\sin t_k = 0$ gibt) für alle $1 \leq k \leq n$. Da jedoch $\lambda_k = \sum_{k=1}^n \cos t_k + i \sum_{k=1}^n \sin t_k$, folgern wir $\lambda_k = 1$ für jeden k. Da aber λ_k die Eigenwerte von ρ_g sind, gilt $\rho_g v_k = v_k$ für alle $1 \leq k \leq n$. Es muss also $\rho_g = \mathsf{Id}_V$ gelten.

Die andere Seite ist trivial. □

Proposition 6.0.3. *Sein* $U_1, \ldots, U_s$ *alle paarweise nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen von* G *und* $\chi_1, \ldots, \chi_s$ *die dazugehörenden Charaktere. Es gilt*

$$\bigcap_{i=1}^s \mathsf{Ker}(\chi_i) = \{1_G\}.$$

Beweis. Sei $N = \bigcap_{i=1}^s \mathsf{Ker}(\chi_i)$. Dies ist bei Definition eine Untergruppe von G. Laut Lemma 6.0.2 ist N der Schnitt von Normalteilern und daher selber ein Normalteiler. Es gilt daher $N \trianglelefteq G$. Wir behaupten, dass $\rho_i : G \to \mathrm{Gl}(U_i)$ durch G/N faktorisiert.

Existenz: Wir wollen $\rho_i' : G/N \to \mathrm{Gl}(U_i)$ definieren, so dass $\rho_i = \rho_i' \circ \pi$, wobei $\pi : G \to G/N$ die kanonische Projektion ist. Sei $\alpha \in G/N$. Wir definieren $\rho_i'(\alpha) := \rho_i(\pi(\hat{\alpha}))$, wobei $\hat{\alpha}$ eine Hochhebung von α über π ist. Es gilt nur zu beweisen, dass dies Wohldefiniert ist. Daher daher $\hat{\alpha}$ und $\tilde{\alpha}$ zwei Hochhebungen. Da jedoch $\subseteq \mathsf{Ker}(\chi_i) = \mathsf{Ker}(\rho_i)$, gilt $\hat{\alpha} - \tilde{\alpha} \in N$ und somit geht die Differenz auf die Identität.

Eindeutigkeit: Dies folgt direkt aus der Surjektivität von π.

Aus Surjektivität folgt auch direkt, dass ρ_i' irreduzibel ist: Sei nämlich $\rho_i' = \mu \oplus \nu$ eine "echte" Zerlegung. Dann ist $\rho_i = \rho_i' \circ \pi = \mu \circ \pi \oplus \nu \circ \pi$ und da π surjektiv ist, ist dies auch eine "echte" Zerlegung. Sei χ_i' der Charakter dieser Zerlegung.

Wiederum die Surjektivität impliziert, dass für $i \neq j$, auch $\chi_i' \neq \chi_j'$ gilt. Es gilt auch $n_i = \chi_i(1_G) = \chi_i'(1_{G/K})$, was wiederum laut Korollar 3.3.8 die Gleichungen

$$n_1^2 + \cdots + n_s^2 = |G|$$

und

$$n_1^2 + \cdots + n_s^2 \leq |G/N|$$

impliziert. Bei der zweiten Gleichung ist kleiner-gleich, wir noch nicht argumentiert haben, dass G/N nicht mehr irreduzible Darstellungen haben kann. Dies folgt nun aber, da $|G/N| \leq |G|$. Wir folgern nun, dass $|G/N| = |G|$ und somit ist $N = \{1_G\}$, wie gewünscht. □

Satz 6.0.4. *Sein $U_1, \ldots, U_s$ alle paarweise nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen von G und $\chi_1, \ldots, \chi_s$ die dazugehörenden Charaktere. Für jeden Normalteiler $N \subseteq G$ gilt*

$$N = \bigcap_{i \in S} \mathsf{Ker}(\chi_i),$$

wobei $S \subseteq \{1, \ldots, s\}$ eine Teilmenge ist.

Beweis. Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und habe G/N s viele paarweise nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen χ_i'. Mit der Prekomposition $G \to G/N$ erhalten wir somit s verschiedene nicht-isomorphe irreduzible Darstellungen χ_i. Proposition 6.0.3 auf die Quotientengruppe G/N angewendet impliziert nun

$$\bigcap_{i \in S} \mathsf{Ker}(\chi_i') = \{1_{G/N}\},$$

was somit

$$\bigcap_{i \in S} \mathsf{Ker}(\chi_i) = N$$

ergibt.

Die andere Seite ist klar, da für jede $S \subseteq \{1, \ldots, s\}$, wir $\bigcap_{i \in S} \mathsf{Ker}(\chi_i) \trianglelefteq G$ haben, da für jeden einzelnen $1 \leq i \leq s$, bei Definition $\mathsf{Ker}(\chi_i) \subseteq G$ haben. □

Definition 6.0.5. Eine Gruppe G heißt einfach, wenn es keinen Normalteiler hat.

Korollar 6.0.6. *Eine Gruppe G genau dann einfach, wenn $\chi_i(g) = \chi_i(1)$ impliziert $g = 1$ oder χ_i der Charakter der trivialen Darstellung ist. In anderen Worten, man kann mit dem Charaktertafel ablesen, ob eine Gruppe einfach ist oder nicht.*

Definition 6.0.7. Eine Gruppe heißt *auflösbar*, wenn wenn es eine Kette Untergruppen

$$1 = G_n \trianglelefteq G_{n-1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G$$

gibt, so dass $G_{i+1} \trianglelefteq G_i$ ein Normalteiler für alle $1 \leq n-1$ und G_i/G_{i+1} Abelsch ist. Spezifisch ist G_{n-1} Abelsch.

Korollar 6.0.8. *Man kann mit dem Charaktertafel bestimmen, ob eine Gruppe auflösbar ist oder nicht.*

6.1 Die Frobenius-Ergänzung

Die Untergruppenversion

Definition 6.1.1. Eine Untergruppe $H \subseteq G$ einer endlichen Gruppe G wird die Frobenius-Ergänzung genannt, wenn

- für jeden $g \in G \setminus H$, gilt $gHg^{-1} \cap H = \{1\}$.

Ohne Beweis (kann man im Abschnitt §4.3 von [**?**] finde) sagen wir folgende Aussage:

Satz 6.1.2 (Ein Satz von Frobenius)**.** *Für eine Frobenius-Ergänzung $H \subseteq G$ definiere*

$$K := G \setminus \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

Die Teilmenge $N := K \cup \{1\}$ ist eine normale Untergruppe von G und ferner gilt

$$G \simeq N \rtimes H.$$

Die Gruppenwirkungversion Zur Erinnerung, eine Wirkung G auf E wird transitiv genannt, wenn es ein $e \in E$ gibt, so dass $Ge = E$.

Satz 6.1.3 (Alternative Version)**.** *Sei G eine endliche Gruppe welches transitiv auf einer Menge E wirkt. Ferner nehme man an, dass für jeden $1 \neq g \in G$ wir maximal ein Fixpunkt haben, sprich $|\{e \in E \mid ge = e\}| = |E^g| \not\leq 1$. Die Teilmenge*

$$N := \{g \in G \mid |E^g| = 0\} \cup \{1\}$$

ist ein Normalteiler von G.

7 Die induzierte Darstellung und die Frobenius-Reziprozität

or how I stopped worrying and learned to love adjunctions

Sei $H \subset G$ eine Teilgruppe. Ein G-Modul V kann durchs einschränken auch als ein H-Modul betrachtet werden. Wir bezeichnen dies durch $Res^G_H V$ und nennen es die *Einschränkung* von V auf H.

Es ist möglich, dies auch umgekehrt zu machen: Sprich von einem H-Modul W ein G-Modul zu machen.

7.1 Die Induzierte Darstellung

Sei G/H die Menge der (linken) Kosets für eine Untergruppe $H \subseteq G$. Für jeden Coset σ wählen wir uns ein für alle mal einen Repräsentanten $x_\sigma \in G$. Für $H = 1H$ sei die Wahl immer 1. Nun definieren wir

$$Ind^G_H(W) = \bigoplus_{\sigma \in G/H} x_\sigma W,$$

wobei $x_\sigma W$ der selbe Vektorraum wie W ist, aber mit einem formellen x_σ davor geschrieben. Wir definieren die Wirkung von $x \in G$ auf $Ind^G_H(W)$ wie folgt:

Jedes Element von $Ind^G_H(W)$ ist von der Form $v = \sum_{\sigma \in G/H} x_\sigma w_\sigma$, wobei $w_\sigma \in W$. Betrachte xx_σ. Es gehört zu einem eindeutigen Coset, welches wir τ nenne. Als solches gibt es einen eindeutigen $h^\sigma \in H$, so dass $xx_\sigma = x_\tau h^\sigma$. Nun definieren wir

$$xv = \sum_{\sigma \in G/H} x_\tau (h^\sigma w_\sigma).$$

Lass uns das folgende einfache Beispiel betrachten: Sei

$$H = S_2 = \{1, (12)\} \subset S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\} = G$$

und W die triviale 1-dimensionale Darstellung von H. Dann hat G/H drei Elemente

$$H = \{1, (12)\}, \quad (123)H = \{(123), (13)\}, \quad (132)H = \{(132), (23)\}.$$

Man nehme die folgenden Repräsentanten $1, (13), (132)$. Es gilt

$$Ind^G_H(W) = 1 \cdot \mathbb{C} \oplus (13) \cdot \mathbb{C} \oplus (132)\mathbb{C}.$$

Da $(12)\cdot 1 = 1\cdot(12)$, $(12)\cdot(13) = (132)$ und $(12)(132) = (13)$, folgt

$$(12)(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha,\gamma,\beta).$$

Hier sind $\alpha \in 1\cdot\mathbb{C}$, $\beta \in (13)\cdot\mathbb{C}$ und $\gamma \in (132)\mathbb{C}$. Gleichwie gilt

$$(23)(\alpha,\beta,\gamma) = (\gamma,\beta,\alpha),$$

da $(23)\cdot 1 = (132)(12)$, $(23)\cdot(13) = (123)\cdot 1 = (13)(12)$ und $(23)(132) = (12)$.

Proposition 7.1.1. *Sei H eine Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Für jeden G-Modul V und jeden H-Modul W gibt es eine Isomorphie von Vektorräumen*

$$\mathsf{Hom}_G(Ind_H^G(W), V) \cong \mathsf{Hom}_H(W, Res_H^G(V)).$$

Beweis. Sei $f : W \to Res_H^G(V)$ ein H-Modulen Homomorphismus. Definiere $\hat{f} : Ind_H^G(W) \to V$ durch

$$\hat{f}(\sum_{\sigma\in G/H} x_\sigma w_\sigma) = \sum_{\sigma\in G/H} x_\sigma \cdot f(w_\sigma).$$

Umgekehrt, sei $g : Ind_H^G(W) \to V$ ein G-Modulen Homomorphismus. Da wir 1 als die Hochhebung von $1H$ gewählt haben, merken wir, dass W ein direkter Summand von $Ind_H^G(W)$ ist und wenn wir die Einschränkung von g auf diesen Summanden nehmen, erhalten wir ein H-Modulen Homomorphismus $\tilde{g} : W \to Res_H^G(V)$. Es ist nicht sehr schwer zu überprüfen, dass diese Konstruktionen zueinander invers sind. □

Bemerkung 7.1.2. Was die Proposition eigentlich aussagt, ist dass die Einschränkung und die induzierte Darstellung *adjungiert* zueinander sind.

7.2 Auf Charakteren fortgesetzt

Sei $\mathcal{C}(G)$ das Hermitsche Raum aller Klassenfunktionen auf G. Sprich, für jeden $\psi : G \to \mathbb{C}$ in $\mathcal{C}(G)$ gilt $\psi(z^{-1}xz) = \psi(x)$, für alle $x, z \in G$. Da jedes Element von H auch ein Element von G ist, erhalten wir eine Funktion

$$y \mapsto \psi(y),\ y \in H.$$

Dies wird die *Einschränkung* von ψ auf H genannt und mit $Res_H^G(\psi)$ bezeichnet. Als solches gilt

$$Res_H^G(\psi)(y) = \psi(y), \quad \text{für jedes Element } \ y \in H.$$

Wir erhalten nun eine Abbildung

$$Res_H^G : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(H),\ \psi \mapsto Res_H^G(\psi).$$

Sei $\phi : H \to \mathbb{C}$ eine Klassenfunktion auf H. Wir definieren $Ind_H^G(\phi) : G \to \mathbb{C}$ wie folgt:

$$Ind_H^G(\phi)(x) = \frac{1}{|H|}\sum_{s\in G, s^{-1}xs\in H} \phi(s^{-1}xs).$$

Lemma 7.2.1. *Für jede Klassenfunktion $\phi \in \mathcal{C}(H)$ ist die Funktion $Ind_H^G(\phi)$ eine Klassenfunktion auf G.*

Proof. Es gilt zu beweisen, dass $Ind_H^G(\phi)(z^{-1}xz) = Ind_H^G(\phi)(x)$ für beliebige $x, z \in G$. Es gilt

$$\begin{aligned} Ind_H^G(\phi)(z^{-1}xz) &= \frac{1}{|H|}\sum_{s\in G, s^{-1}z^{-1}xzs\in H} \phi(s^{-1}z^{-1}xzs) \\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{s,w\in G, w=zs, w^{-1}xw\in H} \phi(w^{-1}xw) \\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{w\in G, w^{-1}xw\in H} \phi(w^{-1}xw) \\ &= Ind_H^G(\phi)(x). \end{aligned}$$

□

Laut Lemma 7.2.1 haben wir eine wohldefinierte Abbildung

$$Ind_H^G : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G).$$

Man erinnere sich, dass wir auf $\mathcal{C}(G)$ ein Hermitsches Produkt durch

$$< \psi_1, \psi_2 >= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\psi_1(x)} \psi_2(x)$$

definiert haben. Um anzudeuten, dass es von der Gruppe G abhängt, schreiben wir $< \psi_1, \psi_2 >_G$ statt $< \psi_1, \psi_2 >$.

Satz 7.2.2 (Frobenius-Reziprozität)**.** *i) Sei V eine Darstellung von G und W eine Darstellung von H. Es gilt*

$$\chi_{Res(V)} = Res_H^G(\chi_V) \quad \text{und} \quad \chi_{Ind(W)} = Ind_H^G(\chi_W).$$

ii) Für jeden $\psi \in \mathcal{C}(G)$ und $\phi \in \mathcal{C}(H)$ gilt

$$< \phi, Res_H^G(\psi) >_H = < Ind_H^G(\phi), \psi >_G .$$

Proof. i) Sei $y \in H$. Es gilt

$$\chi_{Res(V)}(y) = \mathsf{Sp}(\rho_{Res(V)}(y)) = \mathsf{Sp}(\rho_V(y)) = \chi_V(y).$$

Für einen beliebigen $x \in G$ wollen wir nun die Spur von $l_x : Ind(W) \to Ind(W)$ berechnen, wobei l_x einfach die Multiplikation (von Links) mit x bezeichnet. Der Raum $Ind(W)$ ist die direkte Summe von $x_\sigma W$, wobei σ durch alle Elemente von G/H durchläuft. Bei Definition sendet l_x den Summanden $x_\sigma W$ auf den Summanden $xx_\sigma W$. Um $\chi_{Ind(W)}(x)$ zu bestimmen, müssen wir die Spur von l_x berechnen. Hierzu benutzen wir eine Basis von $Ind(W)$, welches eine Vereinigung von Basen der $x_\sigma W$'s ist. Die Indexe σ für die $x\sigma \neq \sigma$, haben Nullen in den Diagonaleinträgen. Die anderen ergeben die Spur von l_x auf σW. Als solches erhalten wir

$$\chi_{Ind(W)}(x) = \sum_{\sigma \in G/H, x\sigma = \sigma} \mathsf{Sp}(l_x : x_\sigma W \to x_\sigma W).$$

Es gilt $x\sigma = \sigma$ genau dann wenn $s^{-1}xs \in H$, $s \in H$. Des weiteren haben wir einen kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f_s} & sW \\ {\scriptstyle s^{-1}xs}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle l_x} \\ W & \xrightarrow[f_s]{} & sW \end{array}$$

Es folgt

$$\mathsf{Sp}(l_x : sW \to sW) = \mathsf{Sp}(l_{s^{-1}xs} : W \to W) = \chi_H(s^{-1}xs),$$

was uns

$$\chi_{Ind(W)}(x) = \sum_{\sigma \in G/H, x\sigma = \sigma} \chi_W(x_\sigma^{-1} x x_\sigma)$$

gibt. Dies impliziert nun den ersten Teil der Aussage, da für beliebige $s \in x_\sigma H$ gilt

$$\chi_W(s^{-1}xs) = \chi_W(x_\sigma^{-1} x x_\sigma).$$

ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
< Ind_H^G(\phi), \psi >_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{Ind_H^G(\phi)(x)} \psi(x) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \frac{1}{|H|} \sum_{s \in G, s^{-1}xs \in H} \overline{\phi(s^{-1}xs)} \psi(x) \\
&= \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{x,s \in G, s^{-1}xs \in H} \overline{\phi(s^{-1}xs)} \psi(x) \\
&= \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{x,s \in G, t \in H, s^{-1}xs = t} \overline{\phi(t)} \psi(x) \\
&= \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{x,s \in G, t \in H, x = sts^{-1}} \overline{\phi(t)} \psi(sts^{-1}) \\
&= \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{s \in G, t \in H} \overline{\phi(t)} \psi(sts^{-1}).
\end{aligned}$$

Da ψ eine Klassenfunktion ist haben wir die Gleichheit $\psi(sts^{-1}) = \psi(t)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
< Ind_H^G(\phi), \psi >_G &= \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{s \in G, t \in H} \overline{\phi(t)} \psi(t) \\
&= \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{s \in G} \sum_{t \in H} \overline{\phi(t)} \psi(t)
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung $\sum_{t \in H} \overline{\phi(t)} \psi(t) = |H| < \phi, Res_H^G(\psi) >_H$ folgt nun

$$\begin{aligned}
< Ind_H^G(\phi), \psi >_G &= \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{s \in G} |H| < \phi, Res_H^G(\psi) >_H \\
&= \frac{1}{|G|} < \phi, Res_H^G(\psi) >_H \sum_{s \in G} 1 \\
&= < \phi, Res_H^G(\psi) >_H .
\end{aligned}$$

□